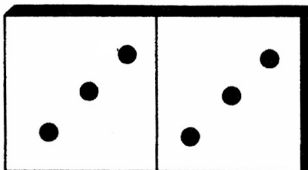
Vaidotas Mockus

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENŲ ŽINYNAS

moksleiviams

Trumpa teorinė medžiaga ir
uždavinių sprendimo pavyzdžiai



Vaidotas Mockus

KOMBINATORIKOS,
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR
MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENŲ
ŽINYNAS
moksleiviams

Trumpa teorinė medžiaga ir
uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Scanned by
Cloud Dancing

Šiauliai, 1995

UDK $\frac{51\ (075.3)}{M_0 - 09}$

Leidinio autorius - Vaidotas Mockus, Šiaulių pedagoginio instituto dėstytojas.

Recenzentai: P.Grebeničenkaitė, Šiaulių miesto "Salduvės " vidurinės mokyklos mokytoja ekspertė,

V.Tamašauskas, Šiaulių miesto Didždvario vidurinės mokyklos vyresnysis mokytojas,

D.Jurgaitis, Šiaulių pedagoginio instituto matematikos ir informatikos katedros docentas, matematikos mokslų daktaras.

ISBN 9986 - 406 - 86 - 2 © Šiaulių pedagoginis institutas, 1995

© Vaidotas Mockus

PRATARMĖ

Nuo 1993/94 m.m. kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys įtraukti į bendrojo lavinimo vidurinių mokyklų matematikos programą. Šių klausimų nėra mokykliniuose matematikos vadovėliuose. Mokyklose stokojama literatūros, skirtos šioms temoms dėstyti. Uždavinių sprendimo metodika nenagrinėjama. Todėl šis žinynas iš dalies užpildys šią spragą.

Šiame leidinėlyje pateikta medžiaga apima visą mokyklinę programą. Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys knygelėje išdėstyti nesiremiant aibių teorija, - kaip tai daroma aukštųjų mokyklų studentams skirtose mokymo priemonėse. Žinyne pateiktos trumpos teorinės žinios. Pagrindinių faktų, formulių taikymą praktikoje iliustruoja daug pavyzdžių su išsamiais jų sprendimo komentarais.

Leidinys skirtas bendrojo lavinimo mokyklų moksleiviams ir matematikos mokytojams. Kadangi į 1995/96 m.m. baigiamojo matematikos egzamino tematiką planuojama įtraukti uždavinį iš knygelėje nagrinėjamų temų, tai šis žinynas turėtų būti naudingas ir 12 klasių mokiniams, kurie jame ras šių temų uždavinių sprendimo pavyzdžius.

Autorius

I skyrius

KOMBINATORIKA

- **Kombinatorika** yra matematikos sritis,nagrinėjanti ,kiek skirtingų kombinacijų,tenkinančių tam tikras sąlygas,galima sudaryti iš baigtinio skaičiaus turimų objektų.

1.Bendrieji kombinatorikos dėsniai

- Kombinatorikos uždaviniai remiasi **dvięm taisyklėmis:**

- **1.Kombinatorinė sudėties taisyklė.** Jei kuriam nors objektui A_1 pasirinkti yra n_1 būdų,objetui A_2 pasirinkti yra n_2 būdų,...,objektui A_k pasirinkti yra n_k būdų,tai pasirinkti arba A_1 ,arba A_2 ,...,arba A_n yra $n_1+n_2+...+n_k$ būdų.

Dviejų objektų A ir B atveju,kombinatorinė sudėties taisyklė formuluojama taip:

jei objektui A parinkti yra n būdų,o objektui B parinkti yra m būdų,tai pasirinkti A arba B yra n+m būdų.

1 pavyzdys. Jei vienoje dėžėje yra 20 skirtingų geltonų kamuoliukų,kitoje dėžėje yra 10 skirtingų raudonų kamuoliukų,o trečioje-5 skirtingi mėlyni kamuoliukai,tai pasirinkti vieną geltoną kamuoliuką yra 20 būdų,vieną raudoną kamuoliuką -10 būdų,vieną mėlyną - 5 būdai.1 kamuoliuką(geltoną,raudoną arba mėlyną) galima pasirinkti 20+10+5=35 būdais.

2 pavyzdys. Parduotuvėje yra 6 rūšių šokoladinių saldainių ir 4 rūšių karamelės.Keliais būdais galima nusipirkti vienos rūšies(arba šokoladinių,arba karamelės) saldainių?

Sprendimas. Šokoladinių saldainių galima nusipirkti 6 būdais, o karamelės - 4 būdais.Remiantis kombinatorine sudėties taisykle,vienos rūšies saldainių(arba šokoladinių,arba karamelės) galima nusipirkti 6+4=10 būdų.

3 pavyzdys. Knygų lentynoje yra 20 skirtingų algebros knygų,7 skirtingos tikimybių teorijos knygos ir 25 skirtingos grožinės literatūros knygos.Keliais būdais galima išsirinkti vieną matematikos knygą?

Sprendimas. Vieną algebros knygą pasirinkti galima 20 būdų,pasirinkti vieną geometrijos knygą galima 12 būdų,o pasirinkti vieną tikimybių teorijos knygą galima 7 būdais.Pagal sudėties taisyklę vieną matematikos knygą (arba algebros,arba geometrijos,arba tikimybių teorijos)galima pasirinkti 20+12+7= =39 būdais.

- **2 .Kombinatorinė daugybos taisyklė.** Jei kuriam nors elementui pasirinkti yra k_1 būdas,elementui x_2 pasirinkti yra k_2 būdai,elementui x_3 - k_3 būdai,tai elementų rinkinį$(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ galime pasirinkti $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot ... \cdot k_n$ būdais.

Dviejų elementų x ir y atveju užrašytoji taisyklė formuluojama taip:

jeigu kuriam nors elementui x pasirinkti yra k būdų,o elementui y - m būdų,tai elementų x ir y porą (x,y) galima pasirinkti $k \cdot m$ būdais.

1 pavyzdys. Valgyklos meniu yra 3 pirmieji 4 antrieji ir 2 tretieji patiekalai.Keliais būdais galima sudaryti 3 skirtingų patiekalų(1 pirmasis,1 antrasis ir 1 trečiasis) rinkinį pietums?

Sprendimas. Pirmąjį patiekalą galime parinkti 3 būdais , antrąjį patiekalą galime parinkti 4 būdais,o trečiąjį - 2 būdais.Remiantis kombinatorine daugybos taisykle ,3 skirtingų patiekalų rinkinį (į jį įeina 1 pirmasis,1 antrasis,1 trečiasis patiekalai) galime sudaryti $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ būdais.

2 pavyzdys. Vienas studentas turi 7 skirtingas matematikos knygas,o kitas - 9.Keliais būdais studentai gali pasikeisti knygomis(kiekvienas studentas gauna po vieną kito studento knygą)?

Sprendimas. Pirmasis studentas pasikeitimui knygomis iš turimų 7 matematikos knygų vieną knygą gali pasirinkti 7 būdais,o antrasis - iš turimų 9 skirtingų matematikos knygų vieną knygą gali pasirinkti 9 būdais.Remiantis kombi-natorine daugybos taisykle,knygų porą (pirmoji yra pirmojo studento,o antroji - antrojo) galima sudaryti $7 \cdot 9 = 63$ būdais .Vadinasi studentai pasikeisti knygomis gali 63 būdais.

3 pavyzdys. Parduotuvėje yra 6 rūšių šokoladinių saldainių ir 4 rūšių karamelės.Keliais būdais galime sudaryti pirkinį,kuriame būtų vienos rūšies saldainių ir vienos rūšies karamelės?

Sprendimas. Vienos rūšies šokoladinių saldainių galime nusipirkti 6 būdais,o vienos rūšies karamelės - 4 būdais.Pagal daugybos taisyklę pirkinį ,į kurį įeitų vienos rūšies šokoladiniai saldainiai ir vienos rūšies karamelė,galime sudaryti $6 \cdot 4 = 24$ būdais.

* * *

Kartais pasitaiko,kad antrojo elemento pasirinkimo būdų skaičius priklauso nuo pirmojo elemento pasirinkimo,trečiojo elemento pasirinkimo būdų skaičius priklauso nuo pirmųjų dviejų elementų pasirinkimo ir t.t.

Pavyzdžiui, jei du elementai renkami iš keturių elementų rinkinio a,b,c,d su sąlyga,kad greta esantys elementai turi būti skirtingi,tai pirmąjį elementą iš keturių elementų galime pasirinkti 4 būdais,o antrąjį elementą po pirmojo elemento pasirinkimo galime pasirinkti tik 3 būdais,nes antrasis poros elementas negali sutapti su pirmuoju.

Tokiais atvejais,sprendžiant uždavinius,dažnai remiamasi **apibendrintąja kombinatorine daugybos taisykle,** kuri formuluojama taip:

jei kuriam nors objektui a_1 pasirinkti yra m_1 būdų,o po kiekvieno tokio pasirinkimo objektą a_2 galima pasirinkti m_2 būdų,po kiekvienų tokių dviejų pasirinkimų objektą a_3 galima pasirinkti m_3 būdų,...,po tokių k pasirinkimų objektą a_k galima pasirinkti m_k būdų,tai objektų rinkinį$(a_1 ,a_2 ,...,a_k)$ galime pasirinkti $m_1 m_2 ... m_k$ būdais.

1 pavyzdys. Rasime,kiek triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš keturių skaitmenų 4,3,5,8.

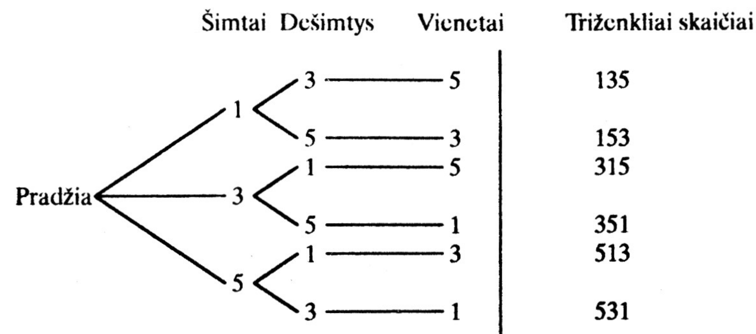
Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 4 būdais(galima paimti bet kurį iš duotųjų 4 skaitmenų).Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais(galima paimti bet kurį iš duotųjų 4 skaitmenų).Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais(galima paimti bet kurį iš 3 po pirmojo pasirinkimo likusių skaitmenų).Trečiąjį skaitmenį galima pasirinkti 2 būdais(galima pasirinkti bet kurį iš 2 po antrojo pasirinkimo likusių skaitmenų).Pagal daugybos taisyklę triženkliui skaičiui sudaryti yra $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdai.

2 pavyzdys. Iš 25 lietuviškos abėcėlės raidžių sudaromi 4 raidžių junginiai taip,kad juose gretimos raidės būtų skirtingos.Kiek tokių raidžių junginių galima sudaryti?

Sprendimas. Pirmąją raidę galima pasirinkti 25 būdais . Po pirmosios raidės pasirinkimo antrąją raidę galime pasirinkti tik 24 būdais,nes kartoti pirmosios raidės negalima.Trečioji raidė turi skirtis nuo antrosios(nors gali sutapti su pirmąja).Todėl trečiąją raidę galime pasirinkti taip pat 24 būdais.Ketvirtoji raidė turi skirtis nuo trečiosios(nors gali sutapti su antrąja arba pirmąja raide). Todėl ketvirtąją raidę galime pasirinkti taip pat 24 būdais. Remdamiesi apibendrintąja kombinatorine daugybos taisykle,gauname, kad 4 raides galime pasirinkti $25 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 345600$ būdais.

3 pavyzdys. Kiek triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1,3,5 , jeigu skaitmenys nesikartoja?

Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį(šimtų) galime pasirinkti 3 būdais,t.y. galime pasirinkti bet kurį iš trijų skaitmenų1,3,5.Po kiekvieno tokio pirmojo skaitmens pasirinkimo antrąjį skaitmenį(dešimčių) galime pasirinkti tik 2 būdais,nes į antrojo skaitmens vietą galime parašyti bet kurį iš dviejų po pirmojo pasirinkimo likusių skaitmenų(pirmojo išrinktojo skaitmens rašyti negalime,nes pagal uždavinio sąlygą skaitmenys skaičiuje neturi kartotis).Po pirmųjų dviejų skaitmenų pasirinkimo į trečiojo skaitmens(vienetų)vietą galime rašyti tik vieną likusįjį skaitmenį,t.y. trečiajam skaitmeniui pasirinkti tėra 1 būdas.Pagal apibendrintąją kombinatorinę daugybos taisyklę galime sudaryti $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ triženklius skaičius su skirtingais skaitmenimis.Šio uždavinio grafinė iliustracija yra specialus grafas,vadinamas "medžiu":



- Kai kuriuos kombinatorikos uždavinius galima išspręsti taikant tam pačiam uždaviniui kombinatorinę sudėties ir kombinatorinę daugybos taisyklę.

Pavyzdys. Kiek skirtingų junginių , kurius sudaro ne mažiau kaip keturios skirtingos raidės,galima sudaryti iš žodžio LAISVĖ raidžių?

Sprendimas. Žodį LAISVĖ sudaro šešios skirtingos raidės.Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę galime sudaryti $N_1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ junginių,sudarytų iš keturių raidžių , $N_2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ junginių , sudarytų iš penkių raidžių, $N_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ junginių,sudarytų iš šešių raidžių.Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę iš viso galima sudaryti $N=360+720+720=1800$ junginių, kuriuos sudaro ne mažiau kaip keturios raidės.

2.Natūraliojo skaičiaus faktorialas

- **Natūraliojo skaičiaus n faktorialas** (žymimas n!) yra visų natūrialiųjų skaičių nuo 1 iki n sandauga:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Susitarta laikyti,kad $0! = 1$.

Pavyzdžiui ,$2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

3.Junginiai

- **Junginiai** yra įvairios grupės,sudarytos iš bet kokių daiktų ir besiskiriančios viena nuo kitos arba pačiais daiktais,arba jų išsidėstymo tvarka.

Junginio **elementais** yra vadinami daiktai,iš kurių sudaryti junginiai.

- **Gretiniai iš n elementų po k** yra tokie junginiai,kurių kiekvienas turi k elementų,parinktų iš n elementų,ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba pačiais elementais,arba jų išsidėstymo tvarka.

Pavyzdžiui,gretiniai abc,cab,bac yra sudaryti iš tų pačių elementų , tačiau yra skirtingi ,nes skiriasi jų elementų išsidėstymo tvarka; gretiniai abd ir cbd yra skirtingi,nes skiriasi pačiais elementais.

Gretinių skaičius iš n elementų,paimtų po k elementų,žymimas $A_n^k (k \le n, n, k \in N)$.Gretinių skaičių galima apskaičiuoti pagal formules:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Susitarta laikyti,kad $A_0^0=1, A_n^0=1$.

1 pavyzdys. Sudarysime visus galimus skirtingus gretinius iš 4 elementų x,y,z,u,paimtų po 2 elementus:

xy	xz	xu
yx	zx	ux
yz	yu	zu
zy	uy	uz

Gavome 12 gretinių.Iš tikrųjų,pagal gretinių skaičiavimo formules:

$$A_4^2 = 4\cdot(4-1) = 4\cdot 3 = 12$$
$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2} = 12.$$

2 pavyzdys. Sudarysime visus galimus skirtingus gretinius iš keturių elementų x,y,z,u,turinčius po3 elementus:

xyz	xyu	yzu	xzu
xzy	xuy	yuz	xuz
yxz	yxu	zyu	zxu
yzx	yux	zuy	zux
zxy	uxy	uyz	uxz
zyx	uyx	uzy	uzx

Gavome 24 gretinius.Pagal gretinių skaičiavimo formules

$$A_4^3 = 4\cdot(4-1)\cdot(4-2) = 4\cdot3\cdot2 = 24\ .$$

$$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24\ .$$

3 pavyzdys. Keliais būdais galima susodinti 5 mokinius 22 kėdėse?

$$A_{22}^5 = 22(22-1)(22-2)(22-3)(22-4) = 3160080 \text{ būdų}.$$

$$A_{22}^5 = \frac{22!}{(22-5)!} = 18\cdot19\cdot20\cdot21\cdot22 = 3160080 \text{ būdų}.$$

4 pavyzdys. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima parašyti penkiais nelyginiais skaitmenimis 1,3,5,7,9 , jeigu skaitmenys tame pačiame skaičiuje nesikartoja?

Sprendimas. Kadangi skirtingi skaičiai turi skirtis bent vienu skaitmeniu arba skaitmenų eile,tai tokių skaičių galime parašyti:

$$A_5^2 = 5\cdot4 = 20.$$

5 pavyzdys. 30 moksleivių grupė pasikeitė fotonuotraukomis.Kiek buvo užsakyta fotonuotraukų?
Sprendimas. Užsakytų fotonuotraukų skaičius yra:

$$A_{30}^2 = 30\cdot29 = 870.$$

- **Gretinių su pasikartojimais** iš n elementų po k skaičius žymimas $\overline{A}_n^k$ ir apskaičiuojamas pagal formulę

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

1 pavyzdys. Sudarysime visus galimus gretinius su pasikartojimais iš keturių elementų x,y,z,u po 2 elementus:

xx	xy	xz	xu
yx	yy	yz	yu
zx	zy	zz	zu
ux	uy	uz	uu

Iš viso gavome 16 gretinių su pasikartojimais.
Pagal formulę

$$\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16.$$

Praeitame skyrelyje buvome gavę,kad gretinių iš 4 elementų x,y,z,u po 2 skaičius yra $A_4^2=12$.Prie šio skaičiaus prijungę gretinius xx ,yy, zz, uu, gauname 16 gretinių su pasikartojimais.

2 pavyzdys. Kiek skirtingų keturženklių skaičių galima užrašyti , panaudojant skaitmenis 3,4,5 ?

$$A_3^4 = 3^4 = 81\ .$$

3 pavyzdys. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 7,8,9, kai tas pats skaitmuo skaičiuje gali kartotis?

$$\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

- **Kėliniai iš n elementų** yra gretiniai iš tų pačių n elementų po n.
Kėlinių skaičius žymimas P_n.

Skirtingi kėliniai yra sudaryti iš tų pačių elementų ir vienas nuo kito skiriasi tik elementų išsidėstymo tvarka.Kėlinių iš n elementų skaičius apskaičiuojamas pagal formulę

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$$

1 pavyzdys. Duoti 3 elementai x,y,z.Sudarykime iš jų visus galimus kėlinius:

xyz	xzy	yxz
yzx	zxy	zyx

Gavome 6 kėlinius.Iš tikrųjų,pagal formulę

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6\ ;$$

2 pavyzdys. Keleivinis traukinys turi 10 vagonų.Keliais būdais galima išdėstyti vagonus paruošiant traukinį?

$$P_{10} = 10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3628800 \text{ būdų}.$$

3 pavyzdys. Kiek skirtingų trispalvių vėliavų galima padaryti kombinuojant mėlyną,baltą ir raudoną spalvas?

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \text{ skirtingas vėliavas}.$$

4 pavyzdys. Keliais būdais galima susodinti 4 žmones prie keturviečio stalo?
Sprendimas. Yra tiek susodinimo būdų,kiek galima sudaryti kėlinių iš 4 elementų:

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

5 pavyzdys. Kiek triženklių skaičių galima parašyti iš duotųjų trijų skaitmenų a,b,c,jeigu nė vienas iš jų nėra lygus nuliui ir skaitmenys skaičiuje nesikartoja?
Sprendimas. Parašytieji triženkliai skaičiai skiriasi skaitmenų eile.Todėl ieškomųjų skaičių yra tiek,kiek galima sudaryti kėlinių iš 3 elementų:

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

- **Kėliniai su pasikartojimais.**

Junginiai sudaryti iš n elementų ($a_1,a_2,\ldots,a_n$) ir kurių pirmasis pasikartoja k_1 kartų,a_2 pasikartoja k_2 kartų,a_3-k_3 kartų,...,a_n pasikartoja k_n kartų yra vadinami **kėliniais su pasikartojimais.**

Kėlinių su pasikartojimais iš n elementų $a_1,a_2,\ldots,a_n$ skaičius randamas pagal formulę:

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_n) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

čia k_1 - elemento a_1 pasikartojimų skaičius;
čia k_2 - elemento a_2 pasikartojimų skaičius;
- -
čia k_n - elemento a_n pasikartojimų skaičius;

Visada
$k_1+k_2+\ldots+k_n=n$

1 pavyzdys. Žinoma ,kad elementas x pasikartoja 2 kartus,elementas y pasikartoja 3 kartus,elementas z pasikartoja 2 kartus.Iš šių elementų(įskaitant jų pasikartojimų skaičių) galima sudaryti įvairius kėlinius su pasikartojimais. pavyzdžiui,

xxyyyzz , xyxyzyz , zyxyxzy.

Kiekvienas toks kėlinys su pasikartojimais turi po 7 elementus:2+3+2=7.Tokių kėliniu su pasikartojimais skaičius lygus

$$P_7(2,3,2)=\frac{7!}{2!3!2!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=210.$$

2 pavyzdys. Kiek kėlinių su pasikartojimais galima sudaryti iš žodžio "kalakutas" raidžių?

Šiuo atveju turime 2 raides k, 3 raides a, 1 raidę l, 1 raidę u, 1 raidę t ir 1 raidę s;iš viso 9 raides:2+3+1+1+1+1=9.Pagal kėliniu su pasikartojimais skaičiaus formulę ieškomųjų kėlinių su pasikartojimais skaičius lygus

$$P_9(2,3,1,1,1,1)=\frac{9!}{2!3!1!1!1!1!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=30240.$$

- **Deriniai** iš n elementų po k elementų yra tokie junginiai,kurių kiekvienas turi k elementų,parinktų iš duotųjų n elementų,ir kurie vienas nuo kito skiriasi tik pačiais elementais.

Pavyzdžiui,abc,bac,cab yra vienas ir tas pats derinys;xy ir yx yra vienas ir tas pats derinys.

Derinių iš n elementų po k skaičius žymimas ir apskaičiuojamas pagal formules:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

arba

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Susitarta laikyti,kad $C_n^0 = 1$ ir $C_0^0 = 1$.

1 pavyzdys. 1.Duoti keturi elementai x,y,z,u.Iš jų galima sudaryti tokius derinius po 2 elementus kiekviename:

xu , yz , zu , xu , xz , yu .

Pagal derinių skaičiaus formulę

$$C_4^2 = \frac{4\cdot(4-1)}{2!} = \frac{4\cdot3}{1\cdot2} = 6$$

arba

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 6.$$

Iš tų pačių elementų x,y,z,u galima sudaryti 4 derinius po 3 elementus:

x y z , x y u , y z u , x z u .

Šiuo atveju:

$$C_4^3 = \frac{4(4-1)(4-2)}{3!} = \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} = 4$$

arba

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot1} = 4.$$

2 pavyzdys. Keliais būdais galima išsirinkti 3 budėtojus iš 20 žmonių grupės?

Kadangi skirtingos budėtojų grupės(kiekvienoje grupėje yra po 3 budėtojus) viena nuo kitos turi skirtis bent vienu žmogumi,tai ieškomas skaičius yra:

$$C_{20}^3 = \frac{20(20-1)(20-2)}{3!} = \frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3} = 1140 \text{ būdų.}$$

Pagal antrąją formulę

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot16\cdot17} = \frac{18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3} = 1140.$$

3 pavyzdys. Kiek skirtingų stygų galima nubrėžti per 6 apskritimo taškus?

Sprendimas. Skirtingų stygų galima nubrėžti tiek,kiek galima sudaryti derinių iš 6 elementų po 2,nes styga vienareikšmiškai nusakoma dviem apskritimo taškais ir elementų išsidėstymo tvarka čia neturi reikšmės. Pavyzdžiui,[AB] ir [BA] - viena ir ta pati styga.Taigi galima išvesti $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ skirtingų stygų.

Atsakymas.15 skirtingų stygų.

4 pavyzdys. Klasėje yra 14 mergaičių ir 8 berniukai.Keliais būdais galima išrinkti 5 moksleivių delegaciją,į kurią įeitų 3 mergaitės ir 2 berniukai?

Sprendimas. Mergaites galima pasirinkti C_{14}^3 būdais,o berniukus - C_8^2 būdais. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle,skirtingų delegacijų skaičius lygus

$$C_{14}^3 C_8^2 = \frac{14\cdot(14-1)(14-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{8(8-1)}{1\cdot2} = \frac{14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{8\cdot7}{1\cdot2} = 10192.$$

Atsakymas. 10192.

Skaičių C_n^k savybės:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Šią formulę patogu taikyti derinių skaičiui apskaičiuoti,kai $k > \frac{n}{2}$.

Pavyzdžiui. $C_{100}^{97} = C_{100}^{100-97} = C_{100}^3 = \frac{100\cdot99\cdot98}{1\cdot2\cdot3} = 161700.$

2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\ ;\ k < n$

Pavyzdžiui. $C_5^3 = C_4^3 + C_4^2;\ C_4^2 = C_3^2 + C_3^1$.

3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Pavyzdžiui. $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

- **Ryšys tarp gretinių iš n elementų po k** skaičius A_n^k ir derinių iš n elementų po k skaičius C_n^k nusakomas formule

$$\boxed{A_n^k = k!C_n^k}$$

- **Deriniai su pasikartojimais.** Deriniai iš n elementų po k elementų su pasikartojimais apskaičiuojami pagal formulę

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}}$$

arba

$$\boxed{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k}$$

Sprendžiant uždavinius patogiau naudotis antrąja formule.

1 pavyzdys. Parduotuvėje yra 5 skirtingų rūšių tušinukų.Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 8 tušinukų rinkinį?

Sprendimas.

$$\overline{C}_5^8 = C_{8+5-1}^8 = C_{12}^8 = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot7\cdot8\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 495 .$$

2 pavyzdys. Gėlių kioske yra 4 skirtingų rūšių gėlių.Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 5 gėles puokštei sudaryti?

Sprendimas.

$$\overline{C}_4^5 = C_{5+4-1}^5 = C_8^5 = C_8^{8-5} = C_8^3 = \frac{8(8-1)(8-2)}{1\cdot2\cdot3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56 .$$

4.Niutono binomas

- **Paskalio trikampis.** C_n^k bei jų skaitines reikšmes,apskaičiuotas pagal formulę $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, k < n$(prisiminkite, kad $C_n^0 = C_n^n = 1, C_0^0 = 1$),patogu surašyti į lentelę, kuri vadinama **Paskalio trikampiu:**

$n=0$	C_0^0	1
$n=1$	$C_1^0\ C_1^1$	1 1
$n=2$	$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$	1 2 1
$n=3$	$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	1 3 3 1
$n=4$	$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$	1 4 6 4 1
$n=5$	$C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	$C_7^0\ C_7^1\ C_7^2\ C_7^3\ C_7^4\ C_7^5\ C_7^6\ C_7^7$	1 7 21 35 35 21 7 1
...	- - - - - - - - -	- - - - - - - -

Pirmas ir paskutinis kiekvienos eilutės elementas yra lygus 1,nes $C_n^0 = C_n^n = 1$.
Kiti eilutės elementai randami pagal **taisyklę:** kiekvienas elementas , išskyrus kraštinius elementus,kurie lygūs 1, yra lygus skaičių,esančių virš jo kairėje ir dešinėje,sumai.**Pavyzdžiui**, 7-oji eilutė iš 6-osios gaunama taip:

1	6	15	20	15	6	1	
↙	↘ ↙	↘ ↙	↘ ↙	↘ ↙	↘ ↙	↘ ↙	↘
1	1+6	6+15	15+20	20+15	15+6	6+1	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	7	21	35	35	21	7	1

- **Niutono formulė.** Paskalio trikampio eilučių elementai atitinka dvinario a+b n-tojo laipsnio koeficientus:

$$(a+b)^0 = 1 = C_0^0$$
$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b = C_1^0 a + C_1^1 b$$
$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2 = C_1^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$
$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\cdot b^3 = C_3^0 a^2 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$
$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$$

- -

- -

Bendru atveju:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n}$$

Ši formulė vadinama **Niutono formule.** Dešinioji šios formulės dalis vadinama binomo laipsnio **dėstiniu.** Koeficientai C_n^k vadinami **binominiais koeficientais.**

Niutono formulės savybės:

1) - dėstinio binominiai koeficientai yra Paskalio trikampio n-tosios eilutės skaičiai;

2) - dėstinio binominiai koeficientai, vienodai nutolę nuo pirmojo ir paskutiniojo nario, yra lygūs;

3) - kiekvieno dėstinio nario, pradedant antruoju, dauginamojo a laipsnio rodiklis yra vienetu mažesnis, negu prieš jį einančio nario dauginamojo a laipsnio rodiklis, o dauginamojo b laipsnio rodiklis yra vienetu didesnis, negu prieš jį einančio nario dauginamojo b laipsnio rodiklis (pirmojo dėstinio nario dauginamasis a yra n-tojo laipsnio, o dauginamasis b-nulinio laipsnio);

4) - bet kuriame naryje a ir b laipsnių rodiklių suma lygi n;

5) - visų binominių koeficientų suma lygi 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \quad ;$$

6) - dešinėje Niutono formulės pusėje yra $n+1$ dėmuo;

7) - kiekvienas dėmuo turi pavidalą $C_n^k a^{n-k} b^k$. $(k+1)$-ojo nario formulė yra

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k},$$

nes dėmuo $C_n^k a^{n-k} b^k$ yra $(k+1)$-oje vietoje.

Niutono formulėje, vietoje b įrašę -b, gauname

$$\boxed{(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots - (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n a^n}$$

Matome, kad ženklai + ir - eina pakaitomis.

1 pavyzdys.
$(y+b)^4 = y^4 + C_4^1 y^3 b + C_4^2 y^2 b^2 + C_4^3 y b^3 + b^4 = y^4 + 4y^3 b + 6y^2 b^2 + 4yb^3 + b^4$.

2 pavyzdys. Rasime binomo laipsnio $(2x-3)^5$ dėstinį.
Sprendimas. Tarkime, kad 2x=a , o -3=b. Tada pagal Niutono formulę

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 ;$$

Į pastarąją išraišką įrašę a=2x , o b= -3, gauname:

$$(2x-3)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 + 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 =$$

$$= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243 .$$

Matome, kad ženklai + ir - eina pakaitomis. Tą patį dėstinį galime gauti skaičiuodami $(2x-3)^5$ pagal jau žinomą formulę binomo laipsniui $(a-b)^n$ skaičiuoti.

Turime:

$$(2x-3)^5 = (2x)^5 - 5\cdot(2x)^4\cdot 3 + 10\cdot(2x)^3\cdot 3^2 - 10\cdot(2x)^2\cdot 3^3 + 5\cdot(2x)\cdot 3^4 - 3^5 =$$
$$= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243 .$$

3 pavyzdys. Rasime binomo laipsnio $(x + \frac{2}{x})^{12}$ dėstinio aštuntąjį narį.

Sprendimas. Pritaikę $(k+1)$-ojo nario formulę $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, gauname

$$T_{7+1} = C_{12}^7 x^{12-7}\left(\frac{2}{x}\right)^7 = C_{12}^5 x^5 \cdot 128 \cdot x^{-7} = \frac{12!}{5!7!}\cdot 128 \cdot x^{-2} = 792 \cdot 128 \cdot x^{-2} = 101376 \cdot x^{-2}$$

4 pavyzdys. Rasime dėstinio narį, kuriame nebūtų x, jeigu binomo laipsnio $(2x + \frac{1}{x})^n$ dėstinio koeficientų suma lygi 256.

Sprendimas. Pasinaudoję Niutono formulės 5 savybe, turime

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n = 256 ;\ 2^n = 256 ; 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8.$$

Tarkime, kad x neturi $(k+1)$-asis narys.

$T_{k+1} = C_n^k (2x)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot x^{n-k} \cdot x^{-k} = C_n^k \cdot 2^{n-k} x^{n-2k}$. Kadangi T_{k+1} narys neturi x , tai $x^{n-2k} = x^0 = 1$, iš čia n-2k=0 . Kadangi n=8, tai 8-2k=0 ; iš čia k=4. Vadinasi, x neturi k+1=4+1=5-asis narys. Apskaičiuojame šį narį iš formulės $T_{k+1} = C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot x^{n-2k}$:

$$T_5 = C_8^4 \cdot 2^{8-4} \cdot x^{8-8} = C_8^4 \cdot 2^4 = \frac{8(8-1)(8-2)(8-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 16 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1120.$$

Atsakymas. 1120.

5 pavyzdys. Rasime binomo laipsnio $(\frac{1}{x} + \sqrt{x})^{12}$ dėstinio narį, kuriame nebūtų x:

Sprendimas. Tarkime, kad kintamojo x neturi $(k+1)$-asis dėstinio narys. Remdamiesi $(k+1)$-ojo nario formule $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ir atsižvelgę į tai , kad $a = \frac{1}{x}$, $b = \sqrt{x}$, $n = 12$, gaunamc:

$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^k = C_{12}^k x^{\frac{3}{2}k-12}$ .Kad $(k+1)$-asis narys T_{k+1} neturėtų x, būtina ir pakankama, kad $x^{\frac{3}{2}k-12} = 1$ arba $x^{\frac{3}{2}k-12} = x^0$, iš čia $\frac{3}{2}k - 12 = 0$, t.y. $k = 8$. Vadinasi, k+1=8+1=9-asis dėstinio narys neturi x. Apskaičiuojame šį narį:

$$T_9 = T_{8+1} = C_{12}^8 = C_{12}^4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495.$$

Atsakymas. 495.

6 pavyzdys. Binomo laipsnio $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ dėstinio pirmųjų trijų narių koeficientų suma lygi 97.Raskite dėstinio narį,turintį x^4.

Sprendimas. Pirmasis dėstinio narys yra $C_n^0(x^2)^n$,

antrasis $C_n^1(x^2)^{n-1}\frac{2}{x}=-2C_n^1x^{2n-3}$,o

trečiasis narys yra $C_n^2(x^2)^{n-2}\left(\frac{2}{x}\right)^2=4C_n^2(x^2)^{n-2}\cdot x^{-2}=4C_n^2x^{2n-6}$.

Pagal uždavinio sąlygą šių narių koeficientų C_n^0, $-2C_n^1$, $4C_n^2$ suma $C_n^0-2C_n^1+4C_n^2=97$,t.y. $1-2n+2n(n-1)=97$. Iš pastarosios lygybės $n_1=8$,$n_2=-6$. Sąlygą tenkina tik n=8, t.y. binomas yra 8 laipsnio.Sakykime,kad x^4 turi (k+1)-asis dėstinio narys: $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.Mūsų uždavinyje $n=8, a=x^2, b=-\frac{2}{x}$,todėl

$$T_{k+1}=C_8^k(x^2)^{8-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=(-1)^k2^kC_8^k(x^2)^{8-k}\cdot x^{-k}=(-2)^kC_8^kx^{16-3k};$$

kadangi (k+1)-ojo nario kintamasis x turi būti ketvirtojo laipsnio , tai 16-3k=4,k=4.Taigi x^4 turi 5-asis dėstinio narys,kurį ir apskaičiuojame

$$T_5=T_{4+1}=(-2)^4C_8^4x^{16-3\cdot4}=16\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4=1120x^4.$$

Atsakymas. $T_5=1120x^4$.

7 pavyzdys. Binomo laipsnio $(1+x)^n$ skleidinio ketvirtasis narys lygus 0,96. Rasime x ir n reikšmes,kai binominių koeficientų suma lygi 1024.

Sprendimas. Kadangi binominių koeficientų suma lygi 2^n , tai iš uždavinio sąlygos $2^n=1024$.Kadangi $1024=2^{10}$,tai $2^n=2^{10}$;iš čia n=10.Ketvirtasis skleidinio narys $T_4=T_{3+1}=C_{10}^3x^3=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}x^3=120x^3$.Pagal sąlygą $120x^3=0,96$; iš čia $x^3=0,008$,t.y. x=0,2.

Atsakymas. x=0,2 ; n=10 .

8 pavyzdys. Rasime binomo laipsnio $\left(\sqrt[9]{\frac{5}{437}}+\sqrt[6]{\frac{2}{7}}\right)^{24}$ dėstinio racionaliuosius narius.

Sprendimas. (k+1)-asis dėstinio narys yra $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.Pagal uždavinio sąlygą n=24 , $a=\sqrt[9]{\frac{5}{437}}$,$b=\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$, todėl

$$T_{k+1}=C_{24}^k\left(\sqrt[9]{\frac{5}{437}}\right)^{24-k}\cdot\left(\sqrt[6]{\frac{2}{7}}\right)^k=C_{24}^k\left(\frac{5}{437}\right)^{\frac{24-k}{9}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{k}{6}}.$$

T_{k+1} bus racionalusis skaičius tik tada,kai $\frac{24-k}{9}$ ir $\frac{k}{6}$ bus sveikieji neneigiami skaičiai,be to,$0\le k\le 24$.Sąlygą "$\frac{k}{6}$ yra racionalusis skaičius" tenkina tiktai šios

k reikšmės: 0,6,12,18,24.Iš šių k reikšmių tinka tik 6 ir 24,nes tada $\frac{24-k}{9}$ yra sveikasis skaičius.Apskaičiuojame ieškomuosius narius:

$$k=6: T_{6+1}=T_7=C_{24}^6\left(\frac{5}{437}\right)^{\frac{24-6}{9}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{6}{6}}=\frac{2200}{437}$$

$$k=24: T_{24+1}=T_{25}=C_{24}^{24}\left(\frac{5}{437}\right)^{\frac{24-24}{9}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{24}{6}}=\frac{16}{2401}$$

Atsakymas. $T_7=\frac{2200}{437}$ ir $T_{25}=\frac{16}{2401}$.

9 pavyzdys. Rasime daugianario $(1+3x+2x^3)^{10}$ koeficientą prie x^4 .

Sprendimas. Įrašę į Niutono formulę n=10 , a=1 , $b=3x+2x^3$,gauname

$$(1+3x+2x^3)^{10}=(\underbrace{1}_{a}+\underbrace{3x+2x^3}_{b}))^{10}=C_{10}^0(3x+2x^3)^0+C_{10}^1(3x+2x^3)+$$
$$+C_{10}^2(3x+2x^3)^2+C_{10}^3(3x+2x^3)^3+C_{10}^4(3x+2x^3)^4+C_{10}^5(3x+2x^3)^5+$$
$$+\ldots+C_{10}^{10}(3x+2x^3)^{10}.$$

Lengva pastebėti,kad binomo laipsnio $(1+3x+2x^3)^{10}$ dėstinys turi tiktai 2 narius,į kuriuos įeina x^4,tai trečiasis dėstinio narys $C_{10}^2(3x+2x^3)^2$ ir pentasis dėstinio narys $C_{10}^4(3x+2x^3)^4$ .Binomo laipsnio dėstinyje palikę tik šiuos du narius,o kitus narius pakeitę daugtaškiu,gauname

$$(1+3x+2x^3)^{10}=C_{10}^2(3x+2x^3)^2+C_{10}^4(3x+2x^3)^4+\ldots=$$
$$C_{10}^2 12x^4+\ldots+C_{10}^4(3x)^4+\ldots=(12C_{10}^2+3^4C_{10}^4)x^4+\ldots$$

Taigi ieškomasis koeficientas lygus $12C_{10}^2+3^4C_{10}^4=17550$.

Atsakymas. 17550 .

10 pavyzdys. Rasime daugianario $(13x^3-7x-5)^{100}$ koeficientų sumą.

Sprendimas. Pastebėsime,kad bet kurio daugianario $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ koeficientų suma lygi daugianario reikšmei,kai x=1.Iš tikrųjų,

$$f(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0.$$

Daugianario $(13x^3-7x-5)^{100}$ reikšmė,kai x=1 lygi vienetui,todėl šio daugianario koeficientų suma lygi vienetui.

11 pavyzdys. Su kuriomis x reikšmėmis penktasis binomo laipsnio $(2x+3)^9$ dėstinio narys bus didesnis už prieš jį ir po jo stovinčius gretimus narius, t.y. didesnis už ketvirtąjį ir šeštąjį narį.

Sprendimas. Sudarome nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} T_5 > T_4, \\ T_5 > T_6. \end{cases}$$

Remdamiesi dėstinio bendrojo nario formule,gauname

$$\begin{cases} C_9^5(2x)^4 3^5 > C_9^4(2x)^5 3^4, \\ C_9^5(2x)^4 3^5 > C_9^6(2x)^3 3^6. \end{cases}$$

Supaprastinę gauname:

$$\begin{cases} 3x^4 > 2x^5, \\ x^4 > x^3 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} 3-2x > 0 \\ x(x-1) > 0. \end{cases}$$

Išsprendę pastarąją sistemą,gausime

$$x \in (-\infty;\, 0) \cup \left(1;\, \frac{3}{2}\right).$$

Atsakymas. $x \in (-\infty;\, 0) \cup \left(1;\, \frac{3}{2}\right)$.

5.Paprasčiausių kombinatorinių tapatybių įrodymo uždaviniai

1 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1} \quad (1)$$

Įrodymas. Paimsime kairiąją (1) tapatybės pusę ir įrodysime,kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n ji lygi dešiniajai tapatybės pusei.Pirmiausiai pastebėkime,kad k-tasis sumos $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$ narys lygus

$$kC_n^k = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k \cdot n!}{(n-k)!1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} =$$
$$= n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Šiuo tarpiniu veiksmu įrodėme tapatybę:

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Vadinasi,$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + \ldots + nC_{n-1}^{n-1} =$
$= n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}) = n\cdot 2^{n-1}$.

Tapatybė įrodyta.

2 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$$

Įrodymas. Remdamiesi Niutono formule , užrašysime binomų laipsnių $(1+x)^{2n}$ ir $(1-x)^{2n}$ skleidinius:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n},$$
$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Tarkime,kad šiose dviejose lygybėse x=1.Tada

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n},$$
$$C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 0.$$

Sudėję šias lygbes panariui,gausime

$$(C_{2n}^0 + C_{2n}^0) + (C_{2n}^1 - C_{2n}^1) + (C_{2n}^2 + C_{2n}^2) + \ldots + (C_{2n}^{2n} + C_{2n}^{2n}) = 2^{2n}$$

arba

$$2C_{2n}^0 + 2C_{2n}^2 + \ldots + 2C_{2n}^{2n} = 2^{2n},$$
$$2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}.$$

Pastarosios lygybės abi puses padalįję iš 2,gausime

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Tapatybė įrodyta.

3 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$A_{n-1}^{m} = A_k^m - mA_{m-1}^{m-1}$$

Įrodymas. Imkime dešiniąją duotosios lygybės pusę ir įrodykime,kad ji lygi kairiajai. Turime:

$$A_n^m - mA_{n-1}^{m-1} = \frac{n!}{(n-m)!} - m\frac{(n-1)!}{(n-1-(m-1))!} = \frac{n!}{(n-m)!} -$$

$$-\frac{m(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n! - m(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n - m\cdot(n-1)!}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)! - m(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m)}{(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m)}{(n-m)(n-m-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} = A_{n-1}^m$$

Tapatybė įrodyta.

4 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ 1 \le k \le n.$$

Įrodymas. Imkime dešiniąją duotosios tapatybės pusę ir įrodykime,kad ji lygi kairiajai pusei.Turime:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)(n-k-1)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)!k}{(k-1)!k(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} =$$

$$=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k.$$

Tapatybė įrodyta.

5 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$P_n=(n-1)(P_{n-1}+P_{n-2}).$$

Įrodymas. Imkime dešiniąją tapatybės pusę ir įrodykime,kad ji lygi kairiajai pusei. Turime:

$$(n-1)(P_{n-1}+P_{n-2})=nP_{n-1}+nP_{n-2}-P_{n-1}-P_{n-2}=$$

$$=(n-1)!n+(n-2)!n-(n-1)!-(n-2)!=n!+$$

$$+(n-2)!(n-1)-(n-1)!=n!+(n-1)!-(n-1)!=n!=P_n.$$

Tapatybė įrodyta.

6 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$1\cdot P_1+2\cdot P_2+3\cdot P_3+\ldots+n\cdot P_n=P_{n+1}-1.$$

Įrodymas.

$$1\cdot P_1+2\cdot P_2+3\cdot P_3+\ldots+n\cdot P_n+1-1=\left(\left(\underbrace{1+1!}_{=2!}\right)+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!\right)-1=$$

$$=\left(\underbrace{2!+2\cdot 2!}_{=3!}+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!\right)-1=\left(\underbrace{3!+3\cdot 3!}_{=4!}+\ldots+n\cdot n!\right)-1=$$

$$=\left(\underbrace{4!+4\cdot 4!}_{=5!}+\ldots+n\cdot n!\right)-1=\ldots=(n-1)!-1.$$

Tapatybė įrodyta.

7 uždavinys. Įrodysime tapatybę:

$$C_n^k\cdot C_{n-k}^{m-k}=C_m^k\cdot C_n^m.$$

Įrodymas. Turime:

$$C_n^k\cdot C_{n-k}^{m-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-(m-k))!}=\frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(m-k)!(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}.$$

$$C_m^k\cdot C_n^m=\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}.$$

Matome,kad kairioji ir dešinioji duotosios tapatybės pusės yra lygios vienam ir tam pačiam reiškiniui.

Tapatybė įrodyta.

II skyrius

TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

1. ĮVYKIAI

- **Įvykis** yra bandymo arba stebėjimo rezultatas.

1 pavyzdys. Lošimo kauliuko išmetimas - bandymas. Lyginio akučių skaičiaus (2, 4 arba 6) arba nelyginio akučių skaičiaus (1, 3 arba 5) iškritimas - galimi jo įvykiai.

2 pavyzdys. Iš dėžutės, kurioje yra 2 geltoni ir 3 raudoni rutuliukai, išimamas vienas rutuliukas - bandymas. Iš dėžutės ištrauktas rutuliukas yra geltonas arba raudonas - galimi jo įvykiai.

- **Būtinasis įvykis** yra toks įvykis, kuris, atlikus bandymą, visada įvyksta.

Pavyzdžiui, jei metame tris lošimo kauliukus, tai įvykis - "iškrito ne daugiau kaip 18 akučių (per visus tris kauliukus)" - yra būtinasis įvykis; jei metame kauliuką, tai įvykis - "iškrito ne daugiau kaip 6 akutės" - yra būtinasis įvykis.

- **Negalimasis įvykis** - įvykis, kuris, atlikus bandymą, niekada neįvyksta.

Pavyzdžiui, jei dėžėje yra 3 mėlyni ir 4 žali rutuliai, tai įvykis - "ištrauktas iš dėžės rutulys yra raudonas" - negalimasis įvykis, nes dėžėje nėra raudonu rutulių.

- **Atsitiktinis įvykis** yra toks įvykis, kuris, atliekant bandymą, gali įvykti arba neįvykti.

Pavyzdžiui, atliekame bandymą - iš dėžės, kurioje yra ir baltu, ir raudonu rutulių, ištraukiame vieną rutulį. Įvykis - "ištrauktas iš dėžės rutulys raudonas" - yra atsitiktinis įvykis, nes galėjo būti ištrauktas ir baltas rutulys.

Atsitiktiniai įvykiai žymimi didžiosiomis abėcėlės raidėmis A, B, C, D ir t. t.

- **Nesutaikomi įvykiai** yra tokie įvykiai, kurie, atliekant bandymą, negali įvykti visi vienu metu, t. y. gali įvykti tik vienas iš jų.

Pavyzdžiui, metant lošimo kauliuką, įvykiai A - "atsivertė lyginis akučių skaičius (2, 4 arba 6) ir B - "atsivertė nelyginis akučių skaičius (1, 3 arba 5) yra nesutaikomi įvykiai, nes kiekvieną kartą, metant kauliuką, gali atsiversti arba lyginis, arba nelyginis akučių skaičius.

- **Poromis nesutaikomi** įvykiai yra tokie įvykiai A_1, A_2, ..., A_n , kai bet kurie du iš jų yra nesutaikomi.

- **Įvykių A ir B suma** yra toks įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A ir B. Įvykių A ir B suma žymima taip : A+B.

1 pavyzdys. Jei bandymas yra "lošimo kauliuko metimas", o įvykis A - "atsivertusių akučių skaičius yra skaičiaus 2 kartotinis " (t. y. skaičius 2 arba 4), o įvykis B - "atsivertusių akučių skaičius yra skaičiaus 3 kartotinis" (t. y. skaičius 3 arba 6), tai įvykis A+B reiškia, kad atsivertusiųjų akučių skaičius yra arba 2, arba 3, arba 4, arba 6, t. y. arba skaičiaus 2, arba skaičiaus 3 kartotinis. A ir B yra nesutaikomi įvykiai, nes viename bandyme jie įvykti negali.

2 pavyzdys. Dėžėje yra baltų, žalių, mėlynų ir geltonų rutulių. Jei
įvykis A - "iš dėžės ištrauktas baltas rutulys", o
įvykis B -" iš dėžės ištrauktas mėlynas rutulys",
tai įvykis A+B yra "ištrauktas baltas arba mėlynas rutulys".

- **Įvykių A ir B sandauga** yra toks įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta abu įvykiai A ir B. Žymima taip: AB.

1 pavyzdys. Jei mėtome lošimo kauliuką, o įvykis A - "atsivertusių akučių skaičius yra skaičiaus 2 kartotinis", o įvykis B - " atsivertusių akučių skaičius yra 3 kartotinis", tai įvykis AB - " atsivertusių akučių skaičius yra 2 ir 3 kartotinis."

2 pavyzdys. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna po vieną kartą į tą patį taikinį.
Įvykis A - "pataikė pirmasis šaulys",
Įvykis B - "pataikė antrasis šaulys",
Įvykis AB -"pataikė abu šauliai".

- **Lygūs įvykiai A ir B** yra tokie įvykiai, jei įvykus vienam iš jų, įvyksta ir kitas. Žymima: A=B.

Pavyzdžiui, įvykiai A - "ne visi klasės mokiniai sėkmingai išlaikė matematikos egzaminą" ir B - " bent vienas klasės mokinys neišlaikė egzamino" yra lygūs.

- **Įvykiui A priešingas** įvykis yra toks įvykis $\overline{A}$, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai neįvyksta A.

1 pavyzdys. Jei mėtome lošimo kauliuką, o įvykis A - "atsivertė lyginis akučių skaičius", tai įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ - "atsivertė nelyginis akučių skaičius".

2 pavyzdys. Jei įvykis A - "šaulys pataikė į taikinį", tai jam priešingas įvykis $\overline{A}$ -"šaulys nepataikė į taikinį".

3 pavyzdys. Metama moneta. Jei įvykis A - "atsivertė herbas", tai įvykis $\overline{A}$ - "atsivertė ne herbas, t. y. atsivertė skaičius".

- **Elementarieji įvykiai** yra tokie įvykiai, iš kurių susideda kai kurie kiti įvykiai.

Pavyzdžiui, iš bandymo - metamas lošimo kauliukas - elementariųjų įvykių

E_1 - "atsivertė dvi akutės",
E_2 - "atsivertė keturios akutės",
E_3 - "atsivertė šešios akutės"
susideda įvykis A - "atsivertė lyginis akučių skaičius, o tai reiškia, kad įvykis A įvyks, jei įvyks bent vienas iš trijų įvykių E_1, E_2 , E_3 .

Įvykiai E_1, E_2 , E_3 yra neskaidomi į paprastesnius įvykius ir yra poromis nesutaikomi, t. y. negali įvykti kartu.

Elementariųjų įvykių aibė yra bandymo visų elementariųjų įvykių visuma. Su bandymu susiję elementarieji įvykiai yra poromis nesutaikomi ir vienas iš jų yra būtinasis įvykis.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 3 rutuliai: raudonas, geltonas ir mėlynas. Iš jos vienu metu ištraukiami du rutuliai. Su šiuo bandymu susiję elementarieji įvykiai yra šie:
E_1 - "ištrauktas raudonas ir geltonas rutuliai",
E_2 - "ištrauktas geltonas ir mėlynas rutuliai",
E_3 - "ištrauktas raudonas ir mėlynas rutuliai".
Įvykiai E_1, E_2 , E_3 yra poromis nesutaikomi, t. y. negali įvykti vienu metu ir vienas iš jų yra būtinasis įvykis.

- **Įvykiui A palankūs elementarieji įvykiai** yra tokie įvykiai, kuriems įvykstant įvyksta ir mus dominantis įvykis A.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 5 rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 3, 4,t. y. rutuliai yra sunumeruoti. Iš jos vienu metu ištraukiami 3 rutuliai. Su šiuo bandymu susiję elementarieji įvykiai yra:
E_1 - "ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 3",
E_2 - "ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 2, 3, 4",
E_3 - "ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 3, 4",
E_4 - "ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 4".
Elementariųjų įvykių skaičius lygus

$$C_4^3 = \frac{4(4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Įvykiai E_1, E_2 , E_3, E_4 yra poromis nesutaikomi ir vienas iš jų yra būtinasis įvykis.
Įvykiui A - "ištrauktųjų rutulių numerius žyminčių skaičių suma mažesnė už 8" - palankūs elementarieji įvykiai yra E_1 ir E_4 , o įvykiui B - "ištrauktųjų rutulių numerius žyminčių skaičių suma didesnė už 6" - palankūs elementarieji įvykiai yra E_2, E_3 ir E_4.

- **Du įvykiai yra sutaikomi**, jei abiem įvykiams yra bent vienas palankus elementarusis įvykis.

1 pavyzdys. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna į tą patį taikinį. Įvykiai: A - "pataikė pirmasis šaulys" ir B - "pataikė antrasis šaulys" - sutaikomi, nes, atliekant bandymą, į taikinį gali pataikyti abu šauliai.

2 pavyzdys. Įvykiai:

A - "atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 3"
ir
B - "atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 9"
yra sutaikomi, nes visada galima rasti tokį skaičių, kuris dalytųsi ir iš 3, ir iš 9 (pavyzdžiui, skaičius 27).

2. ĮVYKIŲ TIKIMYBĖS

- **Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas.**

Jei atliekame bandymą, kurio rezultatai yra vienodai galimi, tai įvykio A, susijusio su šiuo bandymu, tikimybė

$$P(A)=\frac{m}{n};$$

čia n - visų elementariųjų įvykių skaičius, m - įvykių, palankių A, skaičius.

$0 \le m \le n$; $0 \le P(A) \le 1$.

Būtino įvykio A tikimybė $P(A)=1$, nes $m=n$.

Negalimo įvykio A tikimybė $P(A)=0$, nes negalimas įvykis neįvyksta nė viename bandyme (todėl $m=0$).

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Dėžėje yra 10 rutulių: 4 balti ir 6 juodi. Iš dėžės ištraukiamas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad ištrauktas rutulys yra juodas?

Sprendimas. Tarkime, kad visi dėžėje esantys rutuliai turi numerius 1, 2, ..., 10, be to, juodųjų rutulių numeriai yra 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Pažymėkime E_i, kur i= 1, 2, ..., 10, įvykį- "iš dėžės ištraukto rutulio numeris yra i".

Pavyzdžiui, įvykis E_1 - "iš dėžės ištraukto rutulio numeris yra 1", įvykis E_2 - "iš dėžės ištraukto rutulio numeris yra 2" ir t. t.

Šio bandymo elementarieji įvykiai yra $E_1, E_2, ..., E_{10}$, o įvykiui A palankūs įvykiai yra $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$.

Vadinasi, šiuo atveju $n=10$, o $m=6$ ir $P(A)=\frac{6}{10}=0,6$; čia įvykis A - "ištrauktas rutulys yra juodas".

Atsakymas. 0,6.

2 pavyzdys. Penkios vienodos kortelės, kuriose parašytos raidės R, A, V, S, O, atsitiktinai dedamos į eilę. Kokia tikimybė sudėti žodį VORAS?

Sprendimas . Iš viso dėliojant korteles galima gauti $n=P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ kombinacijų. Žodį VORAS galima sudėlioti tik vieninteliu atveju, todėl $m=1$. Tikimybė sudėti žodį VORAS lygi

$P(A)=\frac{1}{120}\approx 0,01$; čia įvykis A - "sudėtas žodis VORAS".

Atsakymas. $\frac{1}{120}\approx 0,01$.

3 pavyzdys. Dėžėje yra 12 baltų ir 8 juodi vienodo didumo rutuliai. Nežiūrėdami išimame du rutulius. Kokia tikimybė, kad jie skirtingų spalvų?

Sprendimas. Iš 20 rutulių išrinkti 2 rutulius galima
$n=C_{20}^2=\frac{20\cdot(20-1)}{2!}=\frac{20\cdot19}{1\cdot2}=190$ būdų.

Pasirinkti du skirtingų spalvų rutulius galima $m=12\cdot8=96$ būdais. Tikimybė, kad ištraukti du rutuliukai bus skirtingų spalvų, lygi
$P(A)=\frac{96}{190}=\frac{48}{95}\approx 0,51$; čia įvykis A - "ištraukti rutuliai yra skirtingų spalvų".

Atsakymas. $\frac{48}{95}\approx 0,51$.

4 pavyzdys. Grupė turistų, susidedanti iš penkiolikos vaikinų ir penkių merginų, burtų keliu nori išrinkti keturis žmones dalyvauti sporto varžybose su kita turistų grupe. Kokia tikimybė, kad komandoje bus du vaikinai ir dvi merginos?

Sprendimas. Tegul įvykis A - "išrinktoje komandoje yra du vaikinai ir dvi merginos". Šiuo atveju bandymas yra toks: "iš dvidešimties žmonių grupės burtų keliu renkami 4 žmonės". Kadangi rinkimas vyksta burtų keliu, tai visos bandymo baigtys (galimi įvykiai) yra vienodai tikėtinos (vienodai tikėtini) ir nesutaikomos (nesutaikomi). Visų galimų bandymo baigčių (visų galimų įvykių) skaičius $n=C_{20}^4$. Du vaikinus iš 15 galima pasirinkti C_{15}^2 būdais ir po kiekvieno tokio pasirinkimo dvi merginas iš 5 galima pasirinkti C_5^2 būdais. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę 2 vaikinus ir 2 merginas galime pasirinkti $C_{15}^2\cdot C_5^2$ būdais, t.y. įvykiui A palankių įvykių skaičius yra $m=C_{15}^2\cdot C_5^2$. Ieškomoji tikimybė

$$P(A)=\frac{m}{n}, \quad P(A)=\frac{C_{15}^2\cdot C_5^2}{C_{20}^4}\approx 0,217.$$

Atsakymas. $\frac{C_{15}^2\cdot C_5^2}{C_{20}^4}\approx 0,217$.

5 pavyzdys. Rinkdamas telefono numerį, abonentas užmiršo du paskutinius numerio skaitmenis ir atsimindamas tik, kad šie skaitmenys yra skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad abonentas surinko teisingą numerį?

Sprendimas. Du paskutiniuosius numerio skaitmenis galima surinkti A_{10}^2 būdų, t.y. tiek būdų, kiek yra gretinių iš 10 elementų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 po 2. Vadinasi, jei bandymas yra "paskutinių dviejų telefono numerio skaitmenų rinkimas", tai galimų šio bandymo baigčių (visų atsitiktinių įvykių) skaičius $n = A_{10}^2$. Įvykiui A - " skaitmenys surinkti teisingai" palankus yra tik vienas įvykis, t.y. viena bandymo baigtis, todėl $m=1$. Taigi

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10\cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{90}$.

6 pavyzdys. Tarp 100 elektros lempučių yra 5 brokuotos. Kokia tikimybė, kad tarp 3 atsitiktinai paimtų lempučių visos trys lemputės yra nebrokuotos?

Sprendimas. Šiuo atveju bandymo "trijų elektros lempučių iš 100 atsitiktinis parinkimas" galimų baigčių (visų galimų įvykių) skaičius yra $n = C_{100}^3$; visos baigtys yra vienodai tikėtinos, nes lemputės paimamos atsitiktinai. Įvykiui A - "tarp 3 atsitiktinai paimtų lempučių visos trys yra nebrokuotos" palankių įvykių skaičius $m = C_{95}^3$. Vadinasi,

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(A) = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} = \frac{95\cdot 94\cdot 93}{100\cdot 99\cdot 98} \approx 0{,}856.$$

Atsakymas. $P(A) \approx 0{,}856$.

7 pavyzdys. Į knygų lentyną atsitiktinai paimamos ir dedamos 4 istorijos ir 3 matematikos knygos. Kokia tikimybė, kad vieno ir to paties dalyko (istorijos arba matematikos) knygos bus sudėtos greta?

Sprendimas. Bandymo "7 knygų dėliojimas į lentyną" galimų baigčių (visų galimų įvykių) skaičius $n=7!$, nes 7 knygas išdėlioti lentynoje yra 7! būdų. Įvykiui A - "vieno ir to paties dalyko knygos sudėtos greta" palankių įvykių skaičius yra $m=2\cdot 4!\cdot 3!$. Iš tikrųjų, 4 istorijos knygas galima sudėlioti į lentyną 4! būdais, o po kiekvieno tokio sudėliojimo 3 matematikos knygas galima sudėlioti 3! būdais. Be to, pačius knygų komplektus (istorijos arba matematikos) galima sudėti 2 būdais, t.y. pirmiausia gali būti sudėtos istorijos knygos, o po to matematikos arba pirmiausiai gali būti sudėtos matematikos, o po to istorijos knygos. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę ir gauname, kad $m=2\cdot 4!\cdot 3!$. Taigi, įvykio A tikimybė lygi

$$P(A) = \frac{2\cdot 4!\cdot 3!}{7!} \approx 0{,}057.$$

Atsakymas. $P(A) \approx 0{,}057$.

- **Priešingo įvykio tikimybė**

Jei įvykiui A priešingas įvykis yra $\overline{A}$, tai

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)} \quad \text{arba} \quad \boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

Iš tikrųjų, jei galimų įvykių yra n, o įvykiui A palankių elementariųjų įvykių yra m, tai įvykiui $\overline{A}$ palankių elementariųjų įvykių yra n-m . Vadinasi, $P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$. Visada $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Gaminant detalę, atliekama keletas operacijų. Tikimybė gauti detalę, neatitinkančią standartų, lygi 0,01. Kokia tikimybė pagaminti gerą detalę?

Sprendimas. Pažymime įvykius:
A - "pagaminta detalė atitinka standartus",
$\overline{A}$ - "pagaminta detalė neatitinka standartų".
Turime $P(\overline{A})=0{,}01$. Tada $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}01=0{,}99$.
Atsakymas. 0,99.

2 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad iškrito mažiau kaip šeši taškai?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - "iškrito mažiau kaip šeši taškai",
$\overline{A}$ - "iškrito šeši taškai".
Įvykiui $\overline{A}$ -palankus tik vienas elementarusis įvykis, todėl $P(\overline{A}) = \frac{1}{6}$. Vadinasi,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Šis pavyzdys rodo, kad, ieškant įvykio tikimybės, kartais patogiau rasti priešingo įvykio tikimybę.

3 pavyzdys. Atsitiktinai paimamas triženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad bent du jo skaitmenys bus skirtingi?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - "pasirinkto triženklio skaičiaus bent du skaitmenys yra skirtingi";
$\overline{A}$ - "pasirinkto triženklio skaičiaus visi skaitmenys skirtingi".
Kadangi visi triženkliai skaičiai yra skaičiai nuo 100 iki 999, tai atsitiktinai parinkti vieną iš šių skaičių yra 900 būdų, t.y. galimų bandymo elementariųjų įvykių skaičius $n=900$. Šiame uždavinyje yra paprasčiau apskaičiuoti įvykiui A

priešingo įvykio $\overline{A}$ tikimybę, o tik po to rasti mus dominančio įvykio A tikimybę. Įvykiui $\overline{A}$ palankių elementariųjų įvykių skaičius

$$m = A_{10}^3 - A_9^2 = 10\cdot 9\cdot 8 - 9\cdot 8 = 9^2\cdot 8, \text{ todėl}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{9^2\cdot 8}{900} = 0,72.$$

Mus dominanti tikimybė $P(A)=1-P(\overline{A})=0,28$.

Atsakymas. 0,28.

- **Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė**

Jei A ir B yra du nesutaikomi įvykiai, tai

$$P(A+B)= P(A)+P(B).$$

Pastaroji formulė teisinga n poromis nesutaikomų įvykių A_1, A_2, A_3, ..., A_n sumai, t.y.

$$P(A_1+A_2+ \ldots +A_n)=P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n).$$

Jei įvykiai A_1, A_2, A_3, ..., A_n sudaro pilną įvykių grupę (yra poromis nesutaikomi, o suma yra būtinasis įvykis), tai

$$P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n)=1.$$

1 pavyzdys. Dėžėje yra 5 raudoni, 2 mėlyni ir 3 žali rutuliai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra mėlynas arba žalias?

Sprendimas. Įvykis A - "ištrauktas mėlynas rutulys"; įvykis B - "ištrauktas žalias rutulys"; įvykis A+B - "ištrauktas mėlynas arba žalias rutulys".

$$P(A)=\frac{2}{10}=0,2 \quad , \quad P(B)=\frac{3}{10}=0,3.$$

Įvykiai A ir B yra nesutaikomi, todėl

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,2+0,3=0,5.$$

Atsakymas. 0,5.

2 pavyzdys. Karinės mokyklos kursantas laiko šaudymo į taikinį įskaitą. Įskaita laikoma išlaikyta, jei kursantas gauna pažymį, ne mažesnį už 4. Kokia tikimybė kursantui išlaikyti egzaminą, jei žinoma, kad tikimybė už šaudymą gauti pažymį 5 lygi 0,3 , o tikimybė gauti pažymį 4 lygi 0,5?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - "už šaudymą gautas pažymys 5";
B - "už šaudymą gautas pažymys 4";
A + B - "už šaudymą gautas pažymys 5 arba 4, t.y. įskaita išlaikyta".

Kadangi įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai

$$P(A+B)= P(A)+P(B)= 0,3+0,5= 0,8.$$

Atsakymas. 0,8.

- **Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė**

Įvykis A yra nepriklausomas nuo B tada, kai jo tikimybė nepriklauso nuo to, ar B įvyko, ar neįvyko. .

Jei A ir B yra du nepriklausomi įvykiai, tai

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);$$

čia P(AB) - dviejų nepriklausomų įvykių A ir B sandaugos tikimybė.

1 pavyzdys. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškris herbas, o kauliuko atsivertusių akučių skaičius bus lyginis?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - " iškrito herbas";
B - "iškrito lyginis akučių skaičius";
AB - "iškrito herbas ir lyginis akučių skaičius".

$$P(A)=\frac{1}{2}, \quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}.$$

Kadangi įvykiai A ir B - nepriklausomi, tai

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{6}$.

2 pavyzdys. Du medžiotojai vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito šauna į zuikį. Zuikis laikomas nušautu, jeigu pataiko bent vienas medžiotojas. Kokia tikimybė, kad zuikis bus nušautas, jeigu medžiotojų pataikymo tikimybės lygios 0,8 ir 0,75?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - "zuikis nušautas";
įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ - "zuikis nenušautas";
B - "į zuikį pataiko pirmasis medžiotojas";
C - "į zuikį pataiko antrasis medžiotojas";
BC - "į zuikį pataiko pirmasis ir antrasis medžiotojas".

Iš pavyzdžio sąlygos išplaukia, kad įvykiai B ir C yra nepriklausomi, o jų tikimybės tokios: P(B)=0,8 , P(C)=0,75.

Pažymėkime įvykiams B ir C bei įvykiui BC priešingus įvykius:

$\overline{B}$ - "į zuikį pirmasis medžiotojas nepataiko";
$\overline{C}$ - "į zuikį antrasis medžiotojas nepataiko";
$\overline{B}\,\overline{C}$ - "į zuikį nepataiko nei pirmasis, nei antrasis medžiotojas".
Įvykiai $\overline{B}$ ir $\overline{C}$ taip pat nepriklausomi; sandauga $\overline{B}\,\overline{C}$ yra įvykis $\overline{A}$, todėl

$$P(\overline{A})=P(\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{B})P(\overline{C})=(1-P(B))(1-P(C))=(1-0,8)(1-0,75)=0,2\cdot 0,25=0,05.$$

Vadinasi,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0,95.$$

Matome, kad nors medžiotojai nėra labai taiklūs, tačiau jų bendri veiksmai gali būti pakankamai sėkmingi.

- **Sąlyginė tikimybė. Dviejų įvykių sandaugos tikimybė**

Jei kurio nors įvykio B tikimybė priklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko įvykis A, tai sakoma, kad įvykio B tikimybė priklauso nuo įvykio A, t. y. įvykio B tikimybė yra ***sąlyginė***. Žymime $P_A(B)$.

Analogiškai, jei įvykio A tikimybė priklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko B, tai įvykio A sąlyginė tikimybė žymima $P_B(A)$.

Sąlyginei tikimybei skaičiuoti teisingos formulės:

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0$$

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)\neq 0$$

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Visos lošimo kauliuko sienos užklijuotos nepermatomu popieriumi: 1, 2, 3 sienos - raudonu, o 4, 5, 6 sienos - juodu. Išmetus lošimo kauliuką, iškrito juoda siena. Kokia tikimybė, kad šioje sienoje yra lyginis akučių skaičius?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - "iškrito lyginis akučių skaičius";
B - "iškritusių akučių skaičius yra didesnis už 3".

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}.$$

Pastebėkime, kad įvykio A besąlyginė tikimybė (arba tiesiog tikimybė P(A) lygi $\frac{1}{2}$.

Atsakymas. $\frac{2}{3}$.

2 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas domino kaulelis yra "dublis", jeigu žinoma, kad ant šio kauliuko esančių taškų suma yra lyginis skaičius?

Sprendimas. Tegul įvykis A - "ant kaulelio esančių taškų suma yra lyginis skaičius", o įvykis B - "ištrauktas kaulelis yra "dublis"". Tada

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{28}}{\frac{16}{28}}=\frac{7}{16}$$

(reikia žinoti, kad iš 28 domino kaulelių ant 16 kaulelių esančių taškų suma yra lyginis skaičius, o 7 kauleliai yra "dubliai").

Pastebėkime, kad įvykio B besąlyginė tikimybė (kai įvykis A nėra įvykęs) yra $P(B)=\frac{7}{28}$.

Dviejų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi vieno iš to įvykio tikimybei, padaugintai iš kito įvykio sąlyginės tikimybės, kai pirmasis įvykis įvyko:

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B)$$

$$P(AB)=P(B)\,P_B(A).$$

1 pavyzdys. Dėžėje yra 3 raudoni ir 6 juodi rutuliai. Atsitiktinai vienas po kito išimami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai juodi?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:
A - "pirmasis rutulys juodas";
B - "antrasis rutulys juodas";
AB - "abu rutuliai juodi".

$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $P_A(B)=\frac{5}{8}$. Įvykiai A ir B priklausomi, todėl

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}.$$

Atsakymas. $\frac{5}{12}$.

2 pavyzdys. Mokinys 2 kartus traukia po vieną bilietą iš 34 egzaminui parengtų bilietų. Kokia tikimybė, kad mokinys išlaikys egzaminą, jeigu jis išmoko tik 30 bilietų ir pirmą kartą ištraukė bilietą, kurio jis nemoka, t.y. "nelaimingą bilietą"?

Sprendimas. Bandymo esmė yra ta, kad mokinys atsitiktinai du kartus traukia po vieną bilietą ir, be to, pirmą kartą ištrauktas bilietas atgal prie likusiųjų bilietų nepadedamas. Pažymėkime įvykius:

A - "pirmą kartą ištrauktas "nelaimingas" bilietas";

B - "antrą kartą ištrauktas "laimingas" bilietas";

AB - "pirmą kartą ištrauktas bilietas buvo "nelaimingas", o antrą kartą - "laimingas".

Įvykiai A ir B yra priklausomi, nes pirmą kartą ištrauktas bilietas negrąžinamas prie likusiųjų. Vadinasi,

$$P(AB)= P(A)\, P_A(B).$$

Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad $P(A)=\frac{4}{34}$. Jeigu įvykis A įvyko, tai ant egzaminatoriaus stalo liko 33 bilietai, iš kurių 30 yra "laimingų". Vadinasi, $P_A(B)=\frac{30}{33}$ ir ieškomoji tikimybė

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{4}{34}\cdot\frac{30}{33}=\frac{60}{561}\approx 0,107.$$

Atsakymas. $\approx 0,107$.

* * *

Jei įvykiai A ir B nepriklausomi, tai $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$, todėl

$$P(AB)=P(A)\, P_A(B)= P(A)\, P(B);$$

$$P(AB)=P(B)\, P_B(A)= P(B)\, P(A).$$

Abiem atvejais

$$\boxed{P(AB)= P(A)\, P(B)}\;,$$

t. y. dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai.

Pavyzdys. Dviejose dėžutėse yra skirtingų spalvų, bet vienodo dydžio ir formos pieštukai. Pirmojoje dėžutėje yra 4 raudoni ir 6 juodi pieštukai, o antrojoje - 3 raudoni, 5 mėlyni ir 2 juodi pieštukai. Iš abiejų dėžučių atsitiktinai išimama po vieną pieštuką. Kokia tikimybė, kad abu pieštukai bus raudoni?

Sprendimas. Bandymo esmė ta, kad iš kiekvienos dėžutės išimama po vieną pieštuką. Pažymėkime įvykius:

A - "iš pirmos dėžutės išimtas pieštukas yra raudonas";

B - "iš antros dėžutės išimtas pieštukas yra taip pat raudonas";

AB - "abu išimti pieštukai yra raudoni".

Įvykiai A ir B yra nepriklausomi, todėl $P(AB)=P(A)\, P(B)$. Turime: $P(A)=\frac{4}{10}=0,4$, $P(B)=\frac{3}{10}=0,3$. Vadinasi, tikimybė, kad abu ištraukti pieštukai yra raudoni, lygi $P(AB)= P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,3= 0,12$.

Atsakymas. 0,12.

3. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Atsitiktinis dydis yra toks dydis, kuris po bandymo įgyja konkrečią, iš anksto nežinomą skaitinę reikšmę.

Atsitiktinių dydžių pavyzdžiai

1. Metame lošimo kauliuką. Atsitiktinis dydis yra vieną kartą metus lošimo kauliuką pasirodžiusių taškų skaičius.
2. Perkame n loterijos bilietų. Atsitiktinis dydis yra laimėjimo dydis.
3. Bandoma elektros lemputės tarnavimo trukmė. Atsitiktinis dydis yra pilnas lemputės tarnavimo laikas.
4. Šaulys n kartų šauna į taikinį. Atsitiktinis dydis yra pataikymų skaičius.
5. Per futbolo varžybas komandos pelnytų įvarčių skaičius yra atsitiktinis dydis.

Toliau žymėsime:

X - atsitiktinis dydis;

$x_1, x_2, ..., x_n$ - atsitiktinio dydžio įgyjamos reikšmės;

$p_1, p_2, ..., p_n$ - atsitiktinio dydžio X įgyjamų reikšmių $x_1, x_2, ..., x_n$ tikimybės atitinkamai;

įvykis A_1 - "atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_1, su tikimybe p_1";

įvykis A_2 - "atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_2, su tikimybe p_2";

....

įvykis A_n - "atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_n, su tikimybe p_n".

Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo dėsnis, arba skirstinys, yra visuma visų atsitiktinio dydžio X reikšmių ir tų reikšmių tikimybių.

Dažniausiai atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašomas lentele:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Įvykiai $A_1, A_2, ..., A_n$ yra nesutaikomi, nes atsitiktinis dydis X gali įgyti tik vieną kurią nors reikšmę. Įvykis $A_1+A_2+...+A_n$ yra būtinasis, t. y. vieną iš reikšmių $x_1, x_2, ..., x_n$ dydis būtinai įgyja, todėl

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1,$$

arba

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1,$$

arba

$$p_1+p_2+...+p_n=1.$$

Pavyzdys. Du kartus metamas lošimo kauliukas. Atsitiktinis dydis X yra per abu metimus iškritusių taškų suma. Užrašysime jo pasiskirstymo dėsnį (skirstinį).

Atsitiktinio dydžio X įgyjamos reikšmės yra skaičiai 2, 3, 4, ..., 12. Vadinasi, atsitiktinis dydis X gali įgyti 11 reikšmių: $x_1=2, x_2=3, x_3=4, ..., x_{11}=12$.

Pažymėkime įvykius:
įvykis A_1 - "atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę $x_1=2$";
įvykis A_2 - "atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę $x_2=3$";
....
įvykis A_{11} - "atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę $x_{11}=12$".

Rasime įvykio A_1 tikimybę.
Bandymo elementariųjų įvykių yra
$n = \overline{A}_6^2 = 6^2 = 36$ (gretiniai su pasikartojimais iš 6 elementų po 2).
Įvykiui A_1 palankių elementariųjų įvykių yra $m=1$ (jei ant pirmojo ir ant antrojo kauliuko atsivertė po vieną tašką, tai jų suma lygi $x_1=2$).
Vadinasi, $P(A_1) = p_1 = \frac{1}{36}$.
Panašiai randame ir kitų įvykių tikimybes:

$P(A_2) = p_2 = \frac{2}{36}$; $P(A_3) = p_3 = \frac{3}{36}$; $P(A_4) = p_4 = \frac{4}{36}$;
$P(A_5) = p_5 = \frac{5}{36}$; $P(A_6) = p_6 = \frac{6}{36}$; $P(A_7) = p_7 = \frac{5}{36}$;
$P(A_8) = p_8 = \frac{4}{36}$; $P(A_9) = p_9 = \frac{3}{36}$; $P(A_{10}) = p_{10} = \frac{2}{36}$;
$P(A_{11}) = p_{11} = \frac{1}{36}$.

Skirstinys užrašytas lentele atrodo taip:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

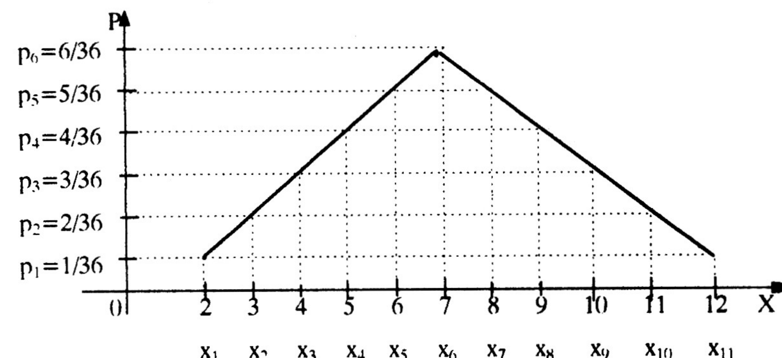
Aišku, kad $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_{11})=1$

arba

$$p_1+p_2+p_3+...+p_{11} = \frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36} = 1.$$

Atsitiktinio dydžio skirstinys gali būti pavaizduotas grafiškai tokiu būdu: O_x ašyje atidedame atsitiktinio dydžio reikšmes, o O_y ašyje - jų atitinkamas tikimybes; laužtė, jungianti taškus $(x_i; p_i)$, yra **pasiskirstymo daugiakampis**, arba **poligonas**.

Išnagrinėtame pavyzdyje atsitiktinio dydžio X skirstinio grafinis vaizdas - poligonas yra toks:



- **Atsitiktinio dydžio matematinė viltis (vidurkis)**
  Tarkime, kad atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašytas lentele

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Atsitiktinio dydžio matematinė viltis (vidurkis) (žymima MX) yra atsitiktinio dydžio reikšmių ir jų atitinkamų tikimybių sandaugų suma:

$$MX=x_1p_1+x_2p_2+ ...+ x_np_n.$$

Matematinė viltis yra vidurkinė atsitiktinio dydžio reikšmė.

1 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašytas lentele atrodo taip:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Rasime atsitiktinio dydžio matematinę viltį (vidurkį). Šiuo atveju:

$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3,\ x_5=4,\ x_6=5,$

$p_1=\frac{1}{32},\ p_2=\frac{5}{32},\ p_3=\frac{10}{32},\ p_4=\frac{10}{32},\ p_5=\frac{5}{32},\ p_6=\frac{1}{32},$

$MX= x_1p_1+x_2p_2+ x_3p_3+ x_4p_4+ x_5p_5+ x_6p_6,$

$$MX = 0\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{5}{32}+2\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{10}{32}+4\cdot\frac{5}{32}+5\cdot\frac{1}{32}=2,5.$$

<u>MX=2,5</u>.

- **Atsitiktinio dydžio dispersija**

<u>Atsitiktinio dydžio X nuokrypis</u> nuo matematinės vilties MX yra atsitiktinis dydis X-MX. Atsitiktinio dydžio X **<u>dispersija</u>** (žymima DX) yra atsitiktinio dydžio $(X-MX)^2$ matematinė viltis:

$$\boxed{DX = M(X-MX)^2}$$

Dispersija parodo, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės yra išsibarsčiusios apie jo matematinę viltį, t. y. jei DX yra nedidelis skaičius, tai X reikšmės artimos matematinei vilčiai, o jei DX yra didelis skaičius, tai X reikšmės labai skiriasi nuo matematinės vilties MX, t. y. labai išsibarsčiusios MX atžvilgiu.

Atsitiktinio dydžio X dispersiją galima skaičiuoti ir pagal šią formulę:

$$\boxed{DX = MX^2-(MX)^2.}$$

Vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu vadinamas dydis $\sigma = \sqrt{DX}$.

<u>1 pavyzdys</u>. Duotas atsitiktinio dydžio X skirstinys (užrašytas lentele):

X	-4	-3	0	5	10
P	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Apskaičiuokime MX ir DX.

$$MX = -4\cdot\frac{6}{16}-3\cdot\frac{4}{16}+0\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{2}{16}+10\cdot\frac{1}{16}=-1.$$

$$MX=-1.$$

$$DX = M(X-DX)^2 = M(X-(-1))^2 = (-4-(-1))^2\cdot\frac{6}{16}+$$

$$+(-3-(-1))^2\cdot\frac{4}{16}+(0-(-1))^2\cdot\frac{3}{16}+(5-(-1))^2\cdot\frac{2}{16}+$$

$$+(10-(-1))^2\cdot\frac{1}{16}=9\cdot\frac{6}{16}+4\cdot\frac{4}{16}+1\cdot\frac{3}{16}+36\cdot\frac{2}{16}+$$

$$+121\cdot\frac{1}{16}=14\frac{1}{8}=14,125.$$

<u>DX=14,125</u>.

III skyrius

MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

1. Generalinė aibė ir imtis

- **<u>Generalinė aibė</u>** yra kurių nors objektų,turinčių vieną ir tą patį bendrą požymį,visuma.

- **<u>Generalinės aibės tūris</u>** yra generalinės aibės elementų skaičius.

- **<u>Imtis</u>** yra statistiniam tyrimui pasirinkta tiriamųjų objektų(generalinės aibės elementų) dalis.

- **<u>Imties tūris</u>** yra imties elementų skaičius.

<u>Pavyzdys.</u>Norima patikrinti,ar automatinėmis tekinimo staklėmis pagamintos detalės yra kokybiškos.Jeigu per parą minėtos staklės pagamina 3000 ritinio formos detalių,tai tam,kad išmatuotume kiekvienos iš jų pagrindo skersmenį bei aukštį(ilgį),reikės daug laiko.Todėl iš visų pagamintų detalių atsitiktinai parenkame tam tikrą jų kiekį,pavyzdžiui,60,ir,jas išmatavę,sprendžiame apie visos produkcijos kokybę.Šiame pavyzdyje generalinė aibė yra visos per pamainą pagamintos detalės,o generalinės aibės tūris lygus 3000.Patikrinimui parinktos detalės sudaro imtį.Imties tūris lygus 60.

Ištyrę generalinės aibės kurios nors imties objektus pagal tam tikrą požymį(pavyzdžiui,nagrinėtame pavyzdyje išmatavę visų 60 imties detalių skersmenį ir aukštį),gauname konkrečią imtį ,kurios elementai yra **<u>skaičiai.</u>**Šie skaičiai yra požymio,pagal kurį tiriami visi imties objektai, skaitinė išraiška. Praktikoje,spręsdami ivairius statistikos uždavinius,visada tiriame imtis, kurias sudaro skaičiai,išreiškiantys tam tikrą nagrinėjamos objektų grupės požymį. Pavyzdžiui,nagrinėtame pavyzdyje iš skaičių sudaryta imtis būtų tokia:
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{60}$,kur x_1-pirmosios imties detalės skersmuo,x_2-antrosios detalės skersmuo,x_3-trečiosios detalės skersmuo;...;x_{60}-60-tosios detalės skersmuo;čia tarp imties elementų gali būti vienodų skaičių.
Panašią imtį galime sudaryti ir iš skaičių $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{60}$,išreiškiančią tiriamųjų detalių aukštį.
Vadinasi,generalinę aibę galima apibrėžti kaip kurio nors atsitiktinio dydžio galimų reikšmių visumą,o imtį-kaip tyrimui parinktą šių reikšmių dalį.Reikia įsidėmėti,kad taip apibrėžta generalinė aibė ir imtis yra sudaryta **<u>iš skaičių.</u>**

- **Matematinės statistikos pagrindinis uždavinys** yra , ištyrus atsitiktinai statistiniam tyrimui paimtą objektų imtį pagal tam tikrą požymį,gauti pagrįstas išvadas apie šio požymio pasiskirstymą visoje objektų grupėje-generalinėje aibėje.

2.Imties skaitinės charakteristikos.

- Jei imties elementai yra surašyti didėjančia tvarka,tai turime **sutvarkytą imtį**,kuri vadinama **imties variacine eilute.**

- **Imties plotis**(žymimas raide r) yra imties didžiausios x_d ir mažiausios x_m reikšmių skirtumas:

$$r = x_d - x_m$$

- **Imties centras**(žymimas raide c) yra didžiausios x_d ir mažiausios x_m imties reikšmių aritmetinis vidurkis

$$c = \frac{x_d + x_m}{2}$$

- **Mediana** yra skaičius,dalijantis imties tūrį į dvi lygias dalis.

Pavyzdys.Duota imtis 3,2,5,1.Sudarysime imties variacinę eilutę,apskaičiuosime imties plotį r,centrą c ir medianą.
Imties variacinė eilutė tokia:
1,2,3,5.
Didžiausias imties elementas yra 5,o mažiausias elementas yra1.Imties plotis r=5-1=4.imties centras $c = \frac{5+1}{2} = 3$,imties mediana lygi $\frac{2+3}{2} = 2,5$.
2. Sudarysime imties 0,3 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 variacinę eilutę,rasime imties plotą r,centrą c ir medianą.
Imties variacinę eilutė tokia:
0,1 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,3 .
Didžiausias imties elementas yra 0,3,o mažiausias elementas yra 0,1.Imties plotis r=0,3-0,1=0,2 , imties centras $c = \frac{0.3+0.1}{2} = 0,2$, mediana lygi 0,2.

- **Imties elemento dažnis**(žymimas m_k) yra skaičius,parodantis,kiek kartų elementas x_k pasikartoja imtyje.

Pavyzdys. Imties 6,8,5,6,10,5,6,10,8,6,10, elemento 6 dažnis lygus 4,nes elementas 6 imtyje pasikartoja 4 kartus,elemento 8 dažnis lygus 2,nes elementas 8 imtyje pasikartoja 2 kartus,elemento 5 dažnis lygus 2,nes elementas 5 pasikartoja 2

kartus,elemento 10 dažnis lygus 3,nes elementas 10 pasikartoja 3 kartus.Elementų dažnių suma lygi imties tūriui:4+2+2+3=11.

- **Dažnių lentelė.**Stebėjimų duomenys dažniausiai surašomi į lentelę,kurios pirmojoje eilutėje užrašome skirtingas variacines eilutės reikšmes x_k,o antrojoje-jų dažnius m_k.

Pavyzdys. Imties 6,8,5,6,10,5,6,10,8,6,10 dažnių lentelė yra

x_k	5	6	8	10
m_k	2	4	2	3

- **Imties elemento santykinis dažnis**(žymimas p_k^*) yra imties elemento dažnio m_k ir imties elementų skaičiaus n santykis:

$$p_k^* = \frac{m_k}{n}$$

Pavyzdys. Rasime imties ,1,2,9,8,1,2,1,8,2,1 elementų santykinius dažnius.
Dažnių lentelė yra

x_k	1	2	8	9
m_k	4	3	2	1

Imties elementų skaičius n=10.
Randame imties elementų dažnius:
elemento 1 santykinis dažnis yra $\frac{4}{10} = 0,4$;
elemento 2 santykinis dažnis yra $\frac{3}{10} = 0,3$;
elemento 8 santykinis dažnis yra $\frac{2}{10} = 0,2$;
elemento 9 santykinis dažnis yra $\frac{1}{10} = 0,1$.
Santykinių dažnių suma lygi 1:

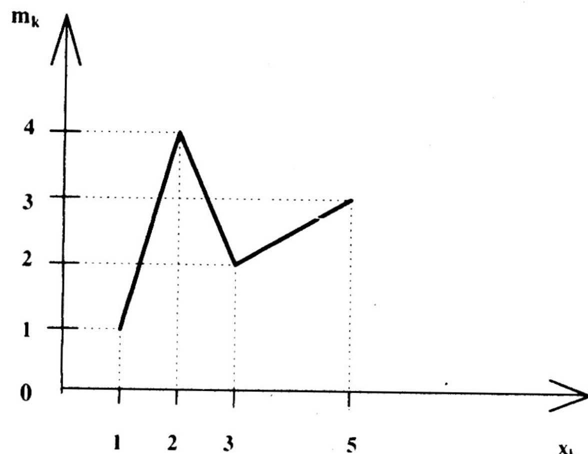
0,4+0,3+0,2+0,1=1.

- **Dažnių lentelę galima pavaizduoti grafiškai tokiu būdu:** abscisių ašyje atidedame imties reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_k$,o ordinačių ašyje - jų atitinkamus dažnius $m_1, m_2, \ldots, m_k$(arba santykinius dažnius $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*$);tiesių atkarpomis sujungiame taškus $(x_k; m_k)$arba $(x_k; p_k^*)$).Kreivė,jungianti atidėtus taškus,ir yra dažnių lentelės grafinis vaizdas.Ši kreivė vadinama **poligonu.**

Pavyzdžiui,imties 2,5,2,5,2,3,5,3,2,1,dažnių lentelės

x_k	1	2	3	5
m_k	1	4	2	3

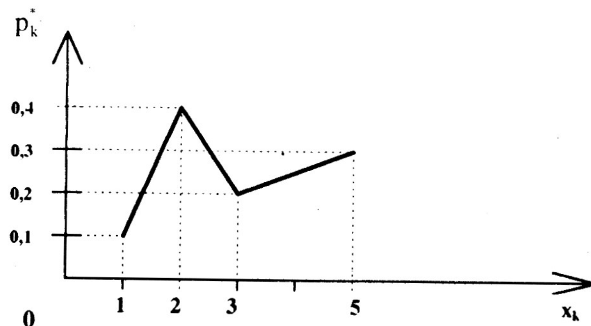
grafinis vaizdas(poligonas) atrodo taip:



Suradę imties elementų santykinius dažnius $p_k^* = \frac{m_k}{n}$ (mūsų atveju n=10),galime nubraižyti panašų imties grafinį vaizdą(poligoną),kai Oy ašyje yra atidėti ne elementų dažniai m_k,bet elementų santykiniai dažniai p_k^*.Santykinių dažnių lentelė yra

x_k	1	2	3	5
p_k^*	0,1	0,4	0,2	0,3

o jos grafinis vaizdas(poligonas):



3.Stebėjimo duomenų grupavimas.

- Paprastai kurios nors objektų grupės tyrimo pagal tam tikrą požymį procese stebėjimo duomenų gaunamc labai daug.Jie dažniausiai būna labai išsibarstę, "negražūs".Su tokiais duomenimis sunku atlikti bet kokius skaičiavimus,taip pat sunku nustatyti kokius nors dėsningumus.Skaičiavimams palengvinti stebėjimo duomenys paprastai **apvalinami ir grupuojami**.Grupuojant duomenis,intervalas, kuriame telpa visi stebėjimo duomenys $x_1,x_2,...,x_n$ paprastai skaidomas į vienodo ilgio **dalinius intervalus**.Skaičiavimų paklaida bus tuo mažesnė,kuo dalinių intervalų ilgis bus mažesnis.Bet reikia atkreipti dėmesį į tai,kad,pasirinkus labai mažą dalinių intervalų ilgį,skaičiavimai būna sudėtingesni.

- **Duomenų grupavimas**-duomenų skirstymas į atskirus dalinius intervalus (grupes). Tarkime,kad didžiausioji imties $x_1,x_2,...,x_n$ reikšmė yra x_d,o mažiausioji - x_m.Tada visos imties reikšmės(visi stebėjimo duomenys) telpa į vieną intervalą $[x_m ; x_d]$.Šio intervalo ilgis yra $x_d - x_m$ .Intervalą $[x_m ; x_d]$ galima skirstyti į dalinius intervalus $[t_i ; t_{i+1})$,kurių ilgis $h = \frac{x_d - x_m}{n}$,kur n - imties reikšmių skaičius.Dalinių intervalų kraštiniai taškai yra $t_1 = x_m - \frac{h}{2}, t_2 = t_1 + h, t_3 = t_2 + h, ..., t_k < x_d$. Kiekvieno dalinio intervalo vidurio reikšmė yra $z_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, i = 1,2,...,k$..Galima laikyti,kad imties reikšmės,patekusios į kokį nors dalinį intervalą $[t_i ; t_{i+1})$,yra lygios to intervalo vidurio reikšmei z_i.
Taip dalijant intervalą $[x_m ;x_d]$ į dalinius intervalus,pastarųjų dažnai gaunama labai daug.Todėl,spręsdami uždavinius,dalinio intervalo ilgį pasirenkame tokį,kad dalinių intervalų skaičius nebūtų labai didelis ir dalijimo procesas nebūtų labai sudėtingas.
Dažniausiai intervalą $[x_m ; x_d]$(jeigu jo ilgis nėra kurio nors 10 laipsnio kartotinis) pakeičiame intervalu $[x'_m ; x'_d]$, kur $x'_m < x_m, x'_d > x_d$,tokiu,kad jo ilgis $x'_d - x'_m$ būtų kurio nors 10 laipsnio kartotinis.Naujai gautą intervalą $[x'_m ; x'_d]$ lengva padalyti į dalinius intervalus,kurių ilgis yra
$\frac{1}{10^n}(n = 1,2,...)$, t.y. 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ;... arba $10^k(k = 0,1,2,...)$ 1 ; 10 ; 100 ; 1000;... priklausomai nuo intervalo $[x'_m ; x'_d]$ ilgio.

Pavyzdys 1. Intervalo [0,5 ; 9,9] ilgis 9,9-0,5=9,4 nėra jokio 10 laipsnio kartotinis ,todėl šį intervalą patogiausia pakeisti intervalu [0 ; 10],kurį nesunku padalyti į dalinius intervalus [0 ; 1),[1 ; 2),[2 ; 3),[3 ; 4),[4 ; 5),...,[8 ; 9),[9 ; 10),kurių ilgis h=1.Šiuo atveju intervalo [0 ; 10] ilgis 10-0=10 yra 10 kartotinis.
2.Intervalo [6,56 ; 7,24] ilgis 7,24-6,56=0,68 nėra jokio 10 laipsnio kartotinis,todėl šį intervalą patogu pakeisti intervalu [6,55 ; 7,25],kurio ilgis 7,25-6,55=0,7 yra $\frac{1}{10} = 0,1$ kartotinis.Intervalą [6,55 ; 7,25] lengva suskirstyti į 7 dalinius intervalus [6,55 ;

6,65),[6,65 ; 6,75),[6,75 ; 6,85),[6,85 ; 6,95),[6,95 ; 7,05),[7,05 ; 7,15),[7,15 ; 7,25),kurių kiekvieno ilgis lygus 0,1.

- **Dalinio intervalo dažnis** yra imties reikšmių ,patekusių į šį intervalą,skaičius.Jis žymimas n_i ; čia i-dalinio intervalo numeris.

- **Intervalo santykinis dažnis**(žymimas f_i) yra intervalo dažnio n_i ir imties tūrio N santykis:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

- Jei stebėjimo duomenis esame suskirstę į dalinius intervalus,t.y.esame juos sugrupavę,be to,apskaičiavę kiekvieno dalinio intervalo $[t_i ; t_{i+1}]$ dažnį n_i,santykinį dažnį f_i bei kiekvieno dalinio intervalo vidurio tašką $z_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, i = 1,2,\dots,k$, tai visus šiuos skaičiavimų rezultatus patogu surašyti į lentelę

t_i	$[t_1;t_2)$	$[t_2;t_3)$	...	$[t_k;t_{k+1})$
z_i	z_1	z_2	...	z_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
f_i	f_1	f_2	...	f_k

Ši sugrupuota duomenų lentelė dar vadinama **klasifikuotos imties dažnių lentele.**

- Turėdami klasifikuotos imties dažnių lentelę galime lengvai nubraižyti grafinį imties vaizdą - **diagramą** arba **histogramą.**

Histogramą braižome tokiu būdu :Ox ašyje atidedame dalinius intervalus,o Oy ašyje-jų santykinius dažnius f_i; po to virš kiekvieno intervalo braižomas stulpelis,kurio aukštis lygus santykiniam dažniui $f_i = \frac{n_i}{N}$; gautoji laiptuota figūra, sudaryta iš stačiakampių ,ir yra **histograma**.Jei braižomo stulpelio aukštis lygus į intervalą patekusių duomenų skaičiui,t.y.intervalo dažniui n_i,tai šiuo atveju tokiu pat būdu gauta laiptuota figūra,sudaryta iš stačiakampių,vadinama **diagrama.**

Histograma(diagrama) rodo,kokiomis proporcijomis duomenys pasiskirstę pasirinktuose intervaluose.

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Matuojant 25 induose esančių druskos rūgšties tirpalų procentinę koncentraciją,gauti tokie duomenys:

2,66	2,96	2,88	2,57	2,71
2,70	3,21	2,58	2,91	2,89
2,83	3,20	3,00	2,69	3,02
3,17	2,92	2,67	2,64	3,14
3,24	3,19	2,77	3,06	3,23

Paėmę dalinio intervalo ilgį,lygų 0,1 , sugrupuosime imties elementus ,t.y. suskirstysime juos į dalinius intervalus,kurių ilgis lygus 0,1.Rasime dalinių intervalų dažnius bei santykinius dažnius.Užrašysime imtį dažnių lentele. Nubrai-žysime histogramą ir diagramą.

Sprendimas. Mažiausioji imties reikšmė yra 2,57 ,o didžiausioji - 3,24.Imties intervalas yra [2,57 ; 3,24].Šio intervalo ilgis yra 3,24-2,57=0,67 ir todėl šis intervalas "blogai" dalijasi į 0,1 ilgio intervalus.Paimsime tokį intervalą,kurio ilgis būtų skaičiaus 0,1 kartotinis.Kairįjį intervalo [2,57 ; 3,24] galą 2,57 sumažinkime iki skaičiaus 2,55 ,o dešinįjį 3,24 padidinkime iki 3,25.Gauname intervalą [2,55 ; 3,25], kurio ilgis yra 3,25-2,55=0,7,t.y.skaičiaus 0,1 kartotinis;pastarasis intervalas lengvai padalijamas į 7 dalinius intervalus,kurių kiekvieno ilgis yra 0,1. Randa-me,kiek imties reikšmių patenka į kiekvieną iš 7 dalinių intervalų,t.y. randame dalinių intervalų $[t_i;t_{i+1}]$ dažnius n_i , i=1,2,3,...,7 . Apskaičiuojame intervalų san-tykinius dažnius $f_i = \frac{n_i}{N}, i = 1,2,\dots,7; N = 25$. Galime laikyti ,kad reikšmės,patekusios į kurį nors iš 7 intervalų , yra lygios to intervalo vidurio reikšmei $z_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, i = 1,2,3,\dots,7.$
Pagal pastarąją formulę randame intervalų $[t_i ; t_{i+1}]$ vidurio taškus z_i.Žemiau pateikiama dažnių lentelė,o po ja visi minėti skaičiavimai:

$$\boxed{i = 1,2,3,4,5,6,7}$$

$[t_i ; t_{i+1})$	[2,55;2,65)	[2,65;2,75)	[2,75;2,85)	[2,85;2,95)	[2,95;3,05)	[3,05;3,15)	[3,15;3,25)
z_i	2,6	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2
n_i	3	5	2	4	3	2	6
f_i	0,12	0,2	0,08	0,16	0,12	0,08	0,24

Skaičiavimai:

$\boxed{i=1}$ Dalinis intervalas $[t_1 ; t_2)$; čia t_1=2,55,t_2=2,65. Į pirmąjį dalinį intervalą [2,55 ; 2,65) patenka trys imties reikšmės:2,57 ; 2,58 ; 2,64.Vadinasi,šio intervalo

dažnis $n_1=3$,o santykinis dažnis $f_1 = \frac{n_1}{N}; f_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12$;čia N=25 - imties elementų skaičius.
Vidurio reikšmė

$$z_1 = \frac{t_1 + t_2}{2} \ ; \ z_2 = \frac{2{,}55 + 2{,}65}{2} = 2{,}6 \ ; \ \text{čia } t_1 = 2{,}55 \ , \ t_2 = 2{,}65$$

- intervalo kraštiniai taškai.

i = 2 Dalinis intervalas $[t_2 ; t_3)$; 2ia $t_2=2{,}65, t_3=2{,}75$. Į antrąjį dalinį intervalą [2,65 ; 2,75) patenka 5 imties reikšmės :2,66 ; 2,67 ; 2,69 ; 2,70 ; 2,71 . Vadinasi,šio intervalo dažnis $n_2=5$,o santykinis dažnis

$$f_2 = \frac{n_2}{N} \ ; \ f_2 = \frac{5}{25} = 0{,}2.$$

Intervalo [2,65 ; 2,75) vidurio reikšmė

$$z_2 = \frac{t_3 + t_4}{2} \ , \ z_2 = \frac{2{,}65 + 2{,}75}{2} = 2{,}7.$$

i = 3 Dalinis intervalas $[t_3 ; t_4)$; čia $t_3=2{,}75$,$t_4=2{,}85$. Į trečiąjį dalinį intervalą [2,75 ; 2,85) patenka 2 imties reikšmės 2,77 ir 2,83.Vadinasi,šio intervalo dažnis $n_3=2$, o santykinis dažnis

$$f_3 = \frac{n_3}{N}; f_3 = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Intervalo vidurio reikšmė

$$z_3 = \frac{2{,}75 + 2{,}85}{2} = 2{,}8.$$

i = 4 Dalinis intervalas $[t_4 ; t_5)$;čia $t_4=2{,}85, t_5=2{,}95$.Į ketvirtąjį dalinį intervalą [2,85 ; 2,95) patenka 4 imties reikšmės : 2,86 ; 2,89 ; 2,91 ; 2,92 .

$$n_4 = 4, \text{o } f_4 = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

Vadinasi,

$$z_4 = \frac{2{,}85 + 2{,}95}{2} = 2{,}9.$$

i = 5 Dalinis intervalas $[t_5 ; t_6)$; čia $t_4=2{,}95, t_6=3{,}05$. Į penktąjį intervalą [2,95 ; 3,05) patenka 3 imties reikšmės:2,96 ; 3,00 ; 3,02.

$$n_5 = 3, \text{o } f_5 = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

Vadinasi,

$$z_5 = \frac{2{,}95 + 3{,}05}{2} = 3.$$

i = 6 Dalinis intervalas $[t_6 ; t_7)$;čia $t_6=3{,}05, t_7=3{,}15$.Į šeštąjį dalinį intervalą [3,05 ; 3,15) patenka 2 imties reikšmės 3,06 ir 3,14.

$$n_6 = 2, f_6 = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Vadinasi,

$$z_6 = \frac{3{,}05 + 3{,}15}{2} = 3{,}1.$$

i = 7 Dalinis intervalas $[t_7 ; t_8)$;čia $t_7=3{,}15, t_8=3{,}25$.Į septintąjį dalinį intervalą [3,15 ; 3,25) patenka 6 imties reikšmės:3,17 ; 3,19 ; 3,20 ; 3,21 ; 3,23 ; 3,24.

$$n_7 = 6; f_7 = \frac{6}{25} = 0{,}24.$$

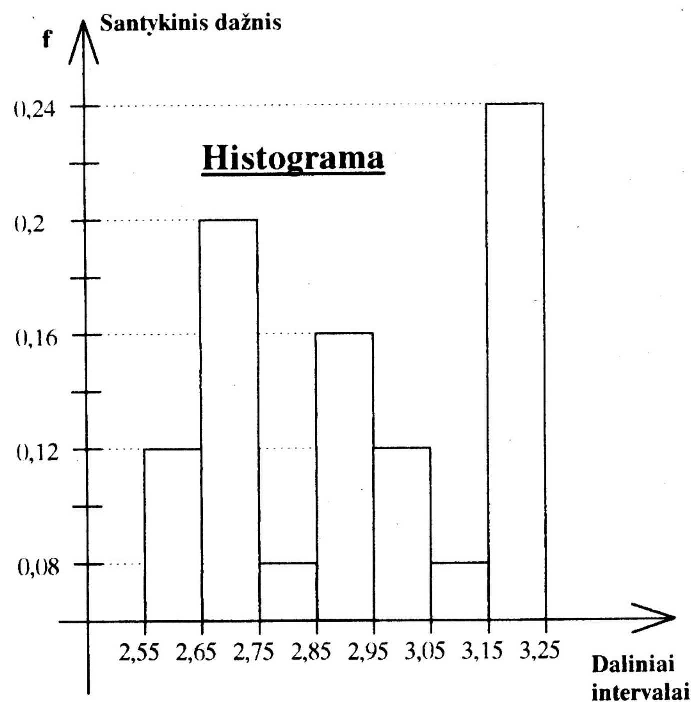
Vadinasi,

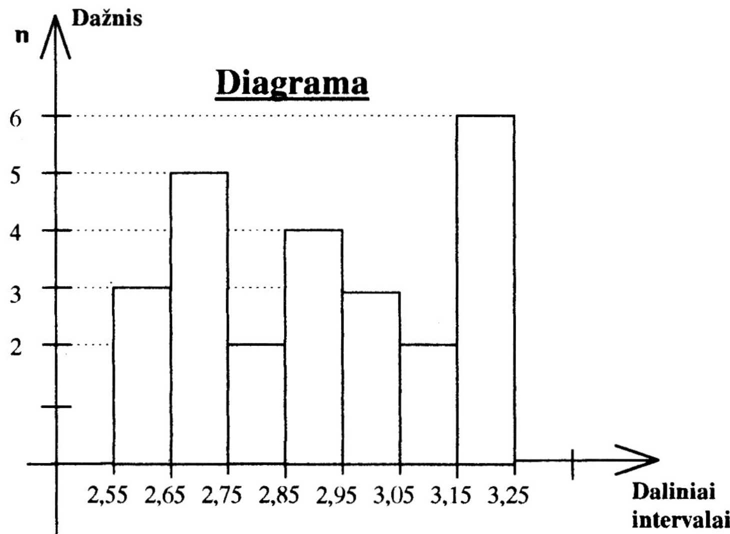
$$z_7 = \frac{3{,}15 + 3{,}25}{2} = 3{,}2.$$

Aišku,kad 3+5+2+4+3+2+6=25,t.y.imties dalinių intervalų dažnių n_i , i=1,2,...,7 suma lygi imties elementų skaičiui.

Imties dalinių intervalų santykinių dažnių f_i , i=1,2,...,7 suma lygi 1: 0,12+0,2+0,08+0,16+0,12+0,08+0,24=1.

Iš dažnių lentelės duomenų nubrėžiame imties grafinį vaizdą - **histogramą** bei **diagramą**.





2 pavyzdys. Matuojant jaunų medelių aukštį (decimetrais),gauti tokie duomenys:

2,8	3,1	3,3	2,6	9,8
2,2	2,3	3,9	4,9	4,1
5,8	2,5	6,2	7,1	8,2
9,1	7,3	5,6	5,9	7,5

Sugrupuosime šią imtį,užrašysime ją dažnių lentele.Nubraižysime histogramą ir diagramą - imties grafinį vaizdą.

Sprendimas. Mažiausioji imties reikšmė - 2,2,didžiausioji - 9,6.Imties intervalas [2,2 ; 9,6].Šiuo atveju patogiausia dalinių intervalų ilgį imti lygų vienetui.Tačiau intervalas [2,2 ; 9,8] "blogai" dalijasi į dalinius intervalus,kurių ilgis lygus vienetui ,todėl imsime intervalą [2 ; 10].Suskaičiuojame,kiek imties reikšmių pateko į kiekvieną dalinį intervalą [2 ; 3),[3 ; 4),[4 ; 5),[5 ; 6),[6 ; 7),[7 ; 8),[8 ; 9),[9 ; 10),t.y. surandame dalinių intervalų dažnius n_i,i=1,2,3,4,5,6,7,8. Remdamiesi formule $f_i = \frac{n_i}{N}$,kur N=20 - imties reikšmių skaičius,randame dalinių intervalų santykinius dažnius f_i,i=1,2,3,4,5,6,7,8.Sudarome klasifikuotos imties dažnių lentelę:

t_i	[2 ; 3)	[3 ; 4)	[4 ; 5)	[5 ; 6)	[6 ; 7)	[7 ; 8)	[8 ; 9)	[9;10)
n_i	5	3	2	3	1	3	1	2
f_i	0,25	0,15	0,1	0,15	0,05	0,15	0,05	0,1

Skaičiavimai

Daliniai intervalai $[t_i ; t_{i+1})$,dalinių intervalų dažniai n_i,santykiniai dažniai f_i ; visur i=1,2,3,4,5,6,7,8.

i = 1 Dalinis intervalas $[t_1 ; t_2)$;čia $t_1=2, t_2=3$.
Į dalinį intervalą [2 ; 3) patenka 5 reikšmės 2,2 ; 2,3 ; 2,5 ; 2,6 ; 2,8 ,t.y. šio intervalo dažnis $n_1=5$.Santykinis dažnis

$$f_1 = \frac{n_1}{20} = \frac{5}{20} = 0{,}25 .$$

i = 2 Dalinis intervalas $[t_2 ; t_3)$;čia $t_2=3, t_3=4$.
Į dalinį intervalą [3 ; 4) patenka 3 reikšmės 3,1 ; 3,3 ; 3,9,t.y. šio intervalo dažnis $n_2=3$.Santykinis dažnis

$$f_2 = \frac{n_2}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15 .$$

i = 3 Dalinis intervalas $[t_3 ; t_4)$;čia $t_3=4$; $t_4=5$.
Į dalinį intervalą [4;5) patenka 2 reikšmės 4,1 ir 4,9,t.y. šio intervalo dažnis $n_3=2$.Santykinis dažnis

$$f_3 = \frac{n_3}{20} = \frac{2}{20} = 0{,}1 .$$

i = 4 Dalinis intervalas $[t_4 ; t_5)$;čia $t_4=5$; $t_5=6$.
Į dalinį intervalą [5;6) patenka 3 reikšmės 5,6 ; 5,8 ; 5,9 ,t.y. šio intervalo dažnis $n_4=3$.Santykinis dažnis

$$f_4 = \frac{n_4}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

i = 5 Dalinis intervalas $[t_5 ; t_6)$;čia $t_5=6; t_6=7$.
Į dalinį intervalą [6;7) patenka 1 reikšmė 6,2 ;t.y. šio intervalo dažnis $n_5=1$.Santykinis dažnis

$$f_5 = \frac{n_5}{20} = \frac{1}{20} = 0{,}05 .$$

i = 6 Dalinis intervalas $[t_6 ; t_7)$; čia $t_6=7; t_7=8$.
Į dalinį intervalą [7 ; 8) patenka 3 reikšmės 7,1 ; 7,3 ; 7,5 ,t.y. šio intervalo dažnis $n_6=3$.Santykinis dažnis

$$f_6 = \frac{n_6}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15 .$$

i = 7 Dalinis intervalas $[t_7 ; t_8)$;čia $t_7=8.t_8=9$.

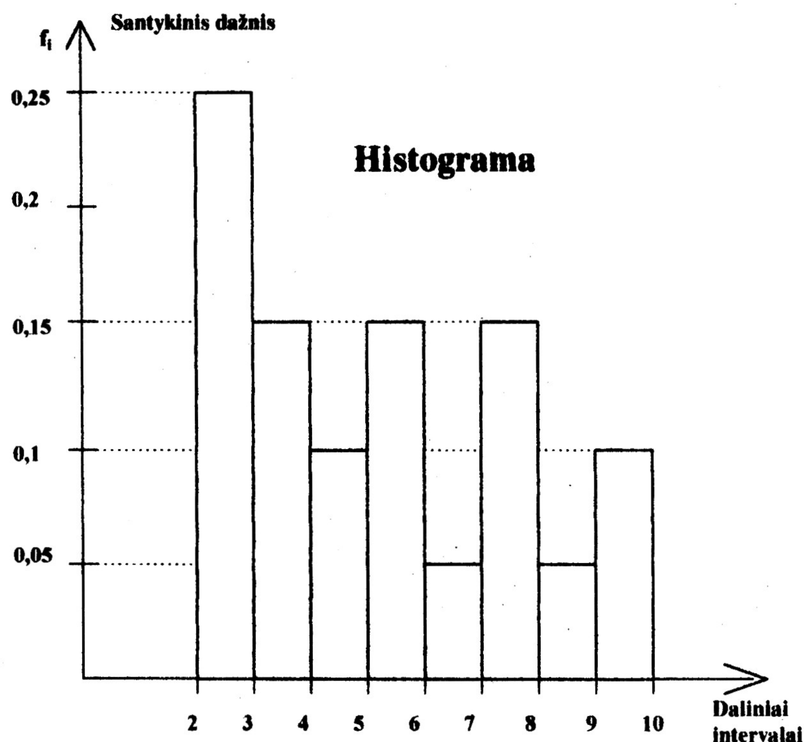
Į dalinį intervalą [8;9) patenka 1 reikšmė 8,2 ; t.y. šio intervalo dažnis $n_7=1$.Santykinis dažnis

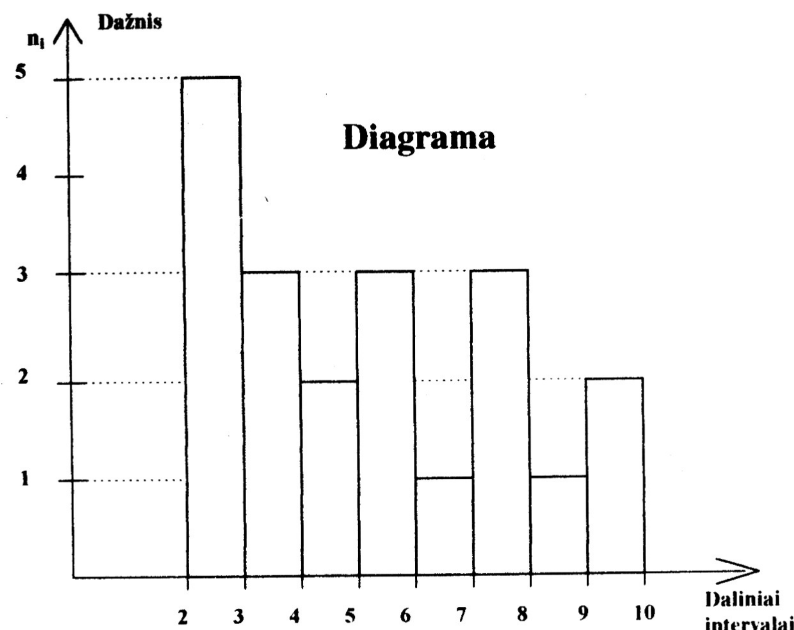
$$f_7 = \frac{n_7}{20} = \frac{1}{20} = 0{,}05 .$$

i = 8 Dalinis intervalas $[t_8 ; t_9)$;čia $t_8=9$; $t_9=10$.
Į dalinį intervalą [9;10) patenka 2 reikšmės 9,1 ir 9,8 ,t.y. šio intervalo dažnis $n_8=2$.Santykinis dažnis

$$f_8 = \frac{n_8}{20} = \frac{2}{20} = 0{,}1 .$$

Nubraižysime imties grafinį vaizdą-**histograma ir diagrama**.Kad nubraižytume histogramą,Oy ašyje atidėsime santykinius dalinių intervalų dažnius f_i , o Ox ašyje atidėsime dalinius intervalus;po to brėžiame stačiakampius stulpelius,kurių aukštis lygus intervalų santykiniam dažniui f_i.Taip pat brėžiame ir diagramą,tik Oy ašyje atidedame intervalų dažnius n_i.





4.Imties vidurkis ir dispersija

- Imties skaitinės charakteristikos yra jos **vidurkis** ir **dispersija.**
- Imties $x_1,x_2,...,x_n$ **vidurkiu** (žymimas $\bar{x}$) vadinamas aritmetinis vidurkis

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (1)$$

- Jei imtis užrašyta dažnių lentele

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

tai tokios **sugrupuotos imties vidurkis**,kai k-grupių skaičius,apskaičiuojamas pagal formulę

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} \qquad (2)$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime imties 2,5,2,4,2,5,3,5,8,1,8,3 vidurkį.
Ši imtis nėra sugrupuota,todėl jos vidurkį skaičiuosime remdamiesi (1) formule:

$$\bar{x} = \frac{2+5+2+4+2+5+3+5+8+1+8+3}{12} = 4$$

2 pavyzdys. Tarkime,kad imtis užrašyta dažnių lentele

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	3	1	5	2	3	4	1	6

Čia turime sugrupuotą imtį,kurios grupių skaičius lygus 8.Remiantis (2) formule,šios imties vidurkis lygus

$$\bar{x} = \frac{2\cdot3+3\cdot1+4\cdot5+5\cdot2+6\cdot3+7\cdot4+8\cdot1+9\cdot6}{25} = 5{,}88$$

- Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **dispersija**(žymima S^2)apskaičiuojama pagal formulę

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} \quad (3)$$

čia $\bar{x}$ - imties vidurkis.

- Jei imtis užrašyta dažnių lentele

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

tai sugrupuotų duomenų imties dispersija apskaičiuojama pagal formulę

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 m_1+(x_2-\bar{x})^2 m_2+\ldots+(x_k-\bar{x})^2 m_k}{n} \quad (4)$$

- Imties dispersija S^2 apibūdina stebėjimo duomenų išsibarstymo dydį apie imties vidurkį.

- Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu** vadinama kvadratinė šaknis iš imties dispersijos.Jis žymimas raide S,

$$S = \sqrt{S^2}$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime imties 5,2,1,1,3 dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.Remdamiesi (1) formule,apskaičiuojame imties vidurkį

$$\bar{x} = \frac{5+2+1+1+3}{5} = 2{,}4 .$$

Remiantis (3) formule,šios imties dispersija

$$S^2 = \frac{(5-2{,}4)^2+(2-2{,}4)^2+(1-2{,}4)^2+(3-2{,}4)^2}{5} = \frac{10{,}16}{5} = 2{,}032 .$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$S = \sqrt{S^2}\ ;\ S = \sqrt{2{,}032} \approx 1{,}43 .$$

2 pavyzdys. Tarkime,kad žinoma imties dažnių lentelė

x_k	1	2	3	5	6	7	8	9
m_k	2	3	1	3	2	5	4	5

Apskaičiuosime šios imties vidurkį,dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.
Remiantis (2) formule,imties vidurkis

$$\bar{x} = \frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1+5\cdot3+6\cdot2+7\cdot5+8\cdot4+9\cdot5}{25} = 6 ;$$

čia 25=2+3+1+3+2+5+4+5 - imties elementų skaičius.
Remiantis (4) formule,imties dispersija

$$S^2 = \frac{(1-6)^2\cdot2+(2-6)^2\cdot3+(3-6)^2\cdot1+(5-6)^2\cdot3+(6-6)^2\cdot2+(7-6)^2\cdot5+(8-6)^2\cdot4+(9-6)^2\cdot5}{25} \approx 7{,}04 .$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$S = \sqrt{S^2}\ ;\ S = \sqrt{7{,}04} \approx 2{,}65 .$$

Uždavinys. Besiruošdami krepšinio rungtynėms,du krepšininkai Saulius ir Paulius 20 kartų po 10 metimų kiekvieną kartą metė iš tos pačios vietos kamuolį į krepšį.Rezultatai buvo tokie:

Saulius

Metimų serijos Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Į krepšį įkritusių kamuolių skaičius	**8**	**6**	**8**	**5**	**8**	**4**	**3**	**6**	**5**	**4**	**2**	**4**	**7**	**8**	**7**	**5**	**7**	**3**	**8**	**7**

Paulius

Metimų serijos Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Į krepšį įkritusių kamuolių skaičius	5	9	3	5	6	7	4	5	8	4	5	7	3	5	8	4	5	6	7	2

Parašykite imčių variacines eilutes,raskite imčių pločius,tūrius. Apskaičiuokite imčių vidurkius,dispersijas,vidutinius kvadratinius nuokrypius. Kuriam krepšininkui geriau sekėsi mėtyti kamuolį į krepšį?

Sprendimas. Saulius:imtis - 8,6,8,5,8,4,3,6,5,4,2,4,7,8,7,5,7,3,8,7 . Imties didžiausioji reikšmė lygi 8,o mažiausioji-2.Imties plotis r=8-2=6 , o tūris n=20 ; imties variacinė eilutė - 2,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,7,7,7,7,8,8,8,8,8.

Dažnių lentelė

x_k	2	3	4	5	6	7	8
m_k	1	2	3	3	2	4	5

Remiantis (2) formule,sugrupuotos imties vidurkis

$$\bar{x}_1 = \frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 3+6\cdot 2+7\cdot 4+8\cdot 5}{20} = 5{,}75 .$$

Remiantis (4) formule,sugrupuotos imties dispersija

$$S_1^2 = \frac{(2-5{,}75)^2\cdot 1+(3-5{,}75)^2\cdot 2+(4-5{,}75)^2\cdot 3+(5-5{,}75)^2\cdot 3+(6-5{,}75)^2\cdot 2+}{20}$$
$$\frac{+(7-5{,}75)^2\cdot 4+(8-5{,}75)^2\cdot 5}{20} \approx 3{,}59 .$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$S_1 = \sqrt{S_1^2}\ ;\ S_1 = \sqrt{3{,}59} \approx 1{,}89 .$$

Paulius:imtis-5,9,3,5,6,7,4,5,8,4,5,7,3,5,8,4,5,6,7,2.Imties didžiausioji reikšmė lygi 9 , o mažiausioji -2.Imties plotis r=9-2=7 , o tūris n=20 ; imties variacinė eilutė - 2,3,3,4,4,4,5,5,5,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9.

Dažnių lentelė

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	3	6	2	3	2	1

Remiantis (2) formule,sugrupuotos imties vidurkis

$$\bar{x}_2 = \frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 6+6\cdot 2+7\cdot 3+8\cdot 2+9\cdot 1}{20} = 5{,}4 .$$

Remiantis (4) formule,sugrupuotos imties dispersija

$$S_2^2 = \frac{(2-5{,}4)^2\cdot 1+(3-5{,}4)^2\cdot 2+(4-5{,}4)^2\cdot 3+(5-5{,}4)^2\cdot 6+(6-5{,}4)^2\cdot 2+}{20}$$
$$\frac{+(7-5{,}4)^2\cdot 3+(8-5{,}4)^2\cdot 2+(9-5{,}4)^2\cdot 1}{20} \approx 3{,}24 .$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$S_2 = \sqrt{S_2^2}\ ;\ S_2 = \sqrt{3{,}24} \approx 1{,}8 .$$

Kadangi $S_1 > S_2$,tai Saulius geriau mėtė į krepšį negu Paulius.

- Dažnai imties dispersiją patogu skaičiuoti taikant formulę

$$\boxed{S^2 = x_1^2 p_1^* + x_2^2 p_2^* + \ldots + x_k^2 p_k^* - \bar{x}^2}\ ;(5)$$

čia $\bar{x}$ - imties vidurkis,o $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*$ - imties elementų santykiniai dažniai.

Pavyzdžiui, išspręstame uždavinyje su krepšininkais imties 8,6,8,5,8,4,3,6,5,4,2,4,7, 8,7,5,7,3,8,7 elementų santykiniai dažniai tokie:

elemento 2 santykinis dažnis $p_1^* = \frac{1}{20} = 0{,}05$,

elemento 3 santykinis dažnis $p_2^* = \frac{2}{20} = 0{,}1$,

elemento 4 santykinis dažnis $p_3^* = \frac{3}{20} = 0{,}15$,

elemento 5 santykinis dažnis $p_4^* = \frac{3}{20} = 0{,}15$,

elemento 6 santykinis dažnis $p_5^* = \frac{2}{20} = 0{,}1$,

elemento 7 santykinis dažnis $p_6^* = \frac{4}{20} = 0{,}2$,

elemento 8 santykinis dažnis $p_7^* = \frac{5}{20} = 0{,}25$.

Imties dažnių lentelė atrodo taip:

x_k	2	3	4	5	6	7	8
m_k	1	2	3	3	2	4	5
p_k^*	0,05	0,1	0,15	0,15	0,1	0,2	0,25

Remiantis (5) formule,imties dispersija lygi

$$S^2 = x_1^2 p_1^* + x_2^2 p_2^* + x_3^2 p_3^* + x_4^2 p_4^* + x_5^2 p_5^* + x_6^2 p_6^* + x_7^2 p_7^* - \bar{x}^2 ,$$

čia $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $x_5=6$, $x_6=7$, $x_7=8$, $p_1^* = 0{,}05$; $p_2^* = 0{,}1$; $p_3^* = 0{,}15$; $p_4^* = 0{,}15$; $p_5^* = 0{,}1$; $p_6^* = 0{,}2$; $p_7^* = 0{,}25$, o $\bar{x} = 5{,}75$.

$$S^2 = 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}15 + 5^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}2 + 8^2 \cdot 0{,}25 - 5{,}75^2 \approx 3{,}59.$$

Imties 5,9,3,5,6,7,4,5,8,4,5,7,3,5,8,4,5,6,7,2 dažnių lentelė yra

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	3	6	2	3	2	1
p_k^*	0,05	0,1	0,15	0,3	0,1	0,15	0,1	0,05

Imties vidurkis lygus $\bar{x} = 5{,}4$.
Remiantis (5) formule,imties dispersija lygi

$$S^2 = 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}15 + 5^2 \cdot 0{,}3 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}15 + 8^2 \cdot 0{,}1 + 9^2 \cdot 0{,}05 - 5{,}4^2 = 3{,}24 .$$

5.Įvykio statistinis dažnis ir tikimybė.

● Tarkime,kad atliekame n bandymų.Kiekvieno bandymo metu įvykis A įvyko arba neįvyko.Jei n bandymų serijoje įvykis A įvyko k kartų,tai įvykio A **statistiniu dažniu** vadiname santykį $\frac{k}{n}$ ir žymime $P_k\{A\}$:

$$\boxed{P_k\{A\} = \frac{k}{n}};$$

čia k-skaičius tų bandymų,kuriuose A įvyko.

Įvykio A statistinis dažnis $P_k\{A\}$ priklauso nuo bandymų skaičiaus.Esant pakankamai dideliam bandymų skaičiui,laukiamo įvykio statistinis dažnis kiek norima mažai skiriasi nuo to įvykio tikimybės atskiro bandymo atveju,t.y. pakankamai didelėms k reikšmėms

$$\boxed{P(A) \approx P_k\{A\}}$$

Šis faktas išreiškia J.Bernulio atskleisto didžiųjų skaičių dėsnio esmę.

TURINYS

Vaidotas MOCKUS
Kombinatorikos tikimybių teorijos ir
matematinės statistikos pradmenų
žinynas moksleiviams
Redaktorius A. Malakauskas

SL 843. 1995 09. 22. 4 leidyb. apsk. l.
Užsakymas 197/A. Tiražas 2000 egz.
Išleido Šiaulių pedagoginis institutas,
P. Višinskio 25, 5400 Šiauliai. Spausdino
Valstybinė "Titnago" spaustuvė,
Vasario 16-osios g. 52, 5400 Šiauliai

Kaina sutartinė